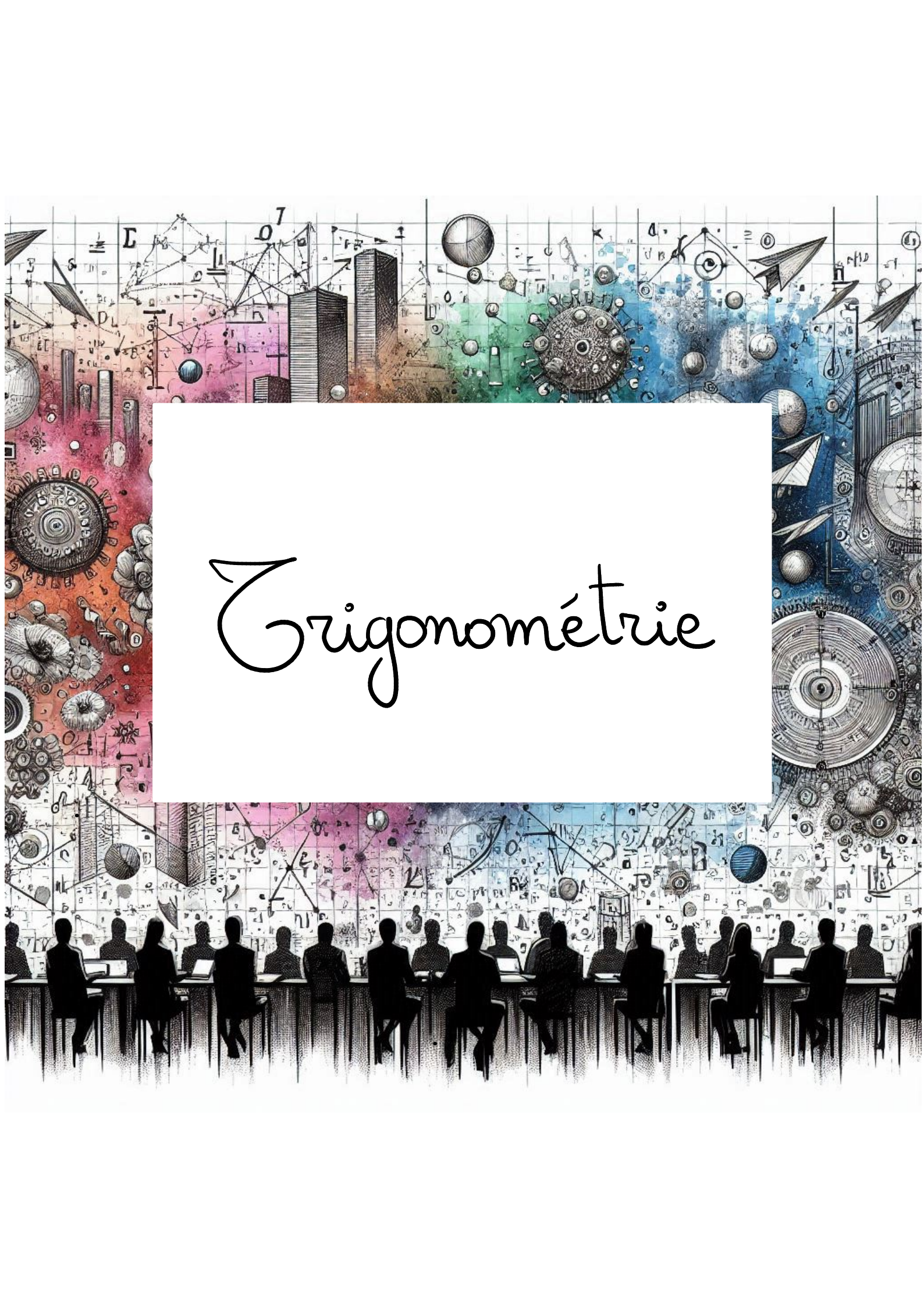




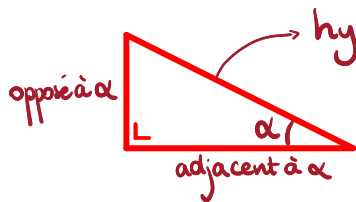
# Trigonométrie



## ANGLES

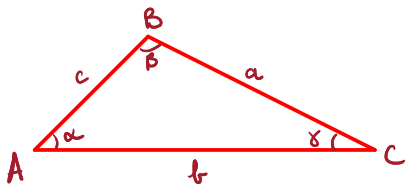
$$1 \text{ tour} = 360^\circ = 2\pi \text{ radians}$$

## DANS UN TRIANGLE RECTANGLE



$$\sin \alpha = \frac{\text{opp} \alpha}{\text{hyp}} ; \quad \cos \alpha = \frac{\text{adja}}{\text{hyp}} ; \quad \text{tg} \alpha = \frac{\text{opp} \alpha}{\text{adja}}$$

## DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE



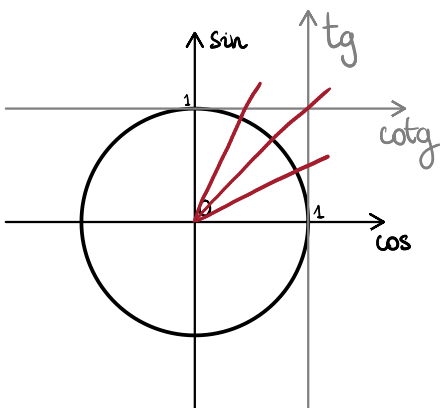
$$\text{Loi des sinus: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

## FORMULES ELEMENTAIRES

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

## CERCLE TRIGONOMETRIQUE & VALEURS PARTICULIERES



| $\alpha$ | 0          | $\frac{\pi}{6}$                           | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|------------|-------------------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| sin      | 0          | $\frac{1}{2}$                             | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| cos      | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                      | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| tg       | 0          | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\nexists$      |
| cotg     | $\nexists$ | $\sqrt{3}$                                | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

## RELATIONS ENTRE LES ANGLES

\*  $\beta + \alpha = \pi$   
supplémentaires

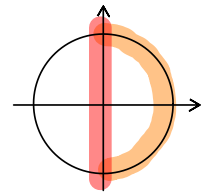
\*  $\beta - \alpha = \pi$   
anti-supplémentaires

\*  $\beta = -\alpha$   
opposés

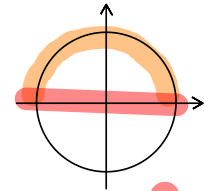
\*  $\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$   
complémentaires

## CYCLOMÉTRIQUES

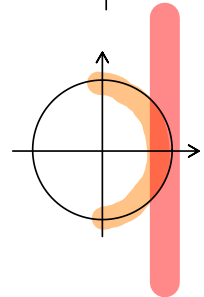
$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$  et  $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$  et  $y \in [0; \pi]$   
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0; \pi]$



$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$  et  $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



## AUTRES TERMES

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

;

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

## ADDITION

\*  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

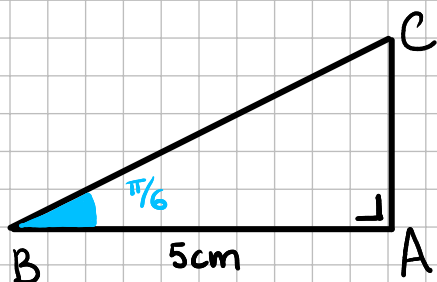
\*  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

5.1. Quelle est la mesure en degrés d'un angle de  $\frac{\pi}{10}$  radians ? À quelle fraction d'un tour complet cet angle correspond-il ?

$$\begin{aligned} 2\pi &= 360^\circ = 1 \text{ tour} \\ \frac{1}{20} \cdot 2\pi &= \frac{\pi}{10} = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ = \frac{1}{20} \text{ tour.} \end{aligned}$$

Un angle de  $\frac{\pi}{10}$  radians mesure  $18^\circ$  et correspond à  $\frac{1}{20}$  de tour.

5.2. Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . On donne  $AB = 5 \text{ cm}$ , et  $\hat{B} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ . Représenter la situation, et déterminer les longueurs  $AC$  et  $BC$ .



$$* \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos \hat{B} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{|BC|}$$

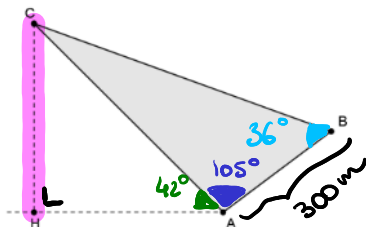
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{|BC|} \Leftrightarrow |BC| = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \sqrt{3}$$

$$* |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Leftrightarrow \frac{100}{3} = 25 + |AC|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{3} = |AC|^2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = |AC|$$

Les côtés  $AB$ ,  $BC$  et  $AC$  mesurent respectivement  $5 \text{ cm}$ ,  $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$  et  $\frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ .

5.6. Sur la figure, on donne les angles  $\widehat{CAH} = 42^\circ$ ,  $\hat{A} = 105^\circ$ ,  $\hat{B} = 36^\circ$  et  $AB = 300 \text{ m}$ . On demande de déterminer la longueur  $CH$  sachant que l'angle dessiné en  $H$  est droit.



① Angles:  $\hat{ACB} = 180^\circ - 105^\circ - 36^\circ = 39^\circ$  et  $\hat{ACH} = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

② Dans le triangle  $ABC$ :  $\frac{\sin \hat{B}}{|AC|} = \frac{\sin \hat{C}}{|AB|}$  par la règle des sinus

$$\Leftrightarrow |AC| = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 39^\circ} \cdot 300 \text{ m}$$

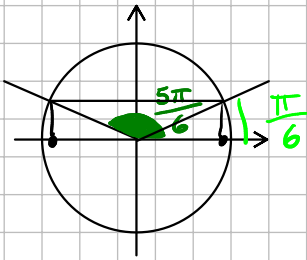
③ Dans le triangle  $AHC$ :  $\sin \hat{A} = \frac{|CH|}{|AC|}$  par la formule du sinus dans un triangle rect.

la longueur  $CH$  vaut:  $|CH| = \sin 42^\circ \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\sin 39^\circ} \cdot 300 \text{ m}$

5.8. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les nombres suivants (valeur exacte) en utilisant les symétries adéquates.

a.  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

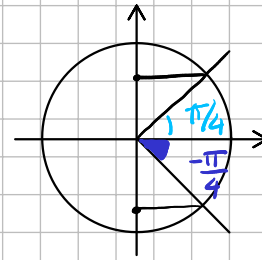
b.  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$$

(angles supplémentaires)

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$$

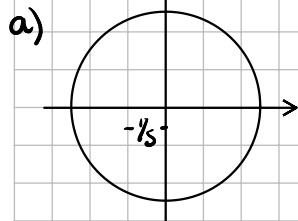
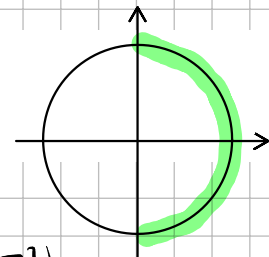
(angles opposés)

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5.13. Soit  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

a. Si  $\sin x = -\frac{1}{5}$ , que vaut la tangente de  $x$  ?

b. Si  $\cos x = \frac{1}{3}$ , quelles sont les valeurs possibles de la tangente de  $x$  ?



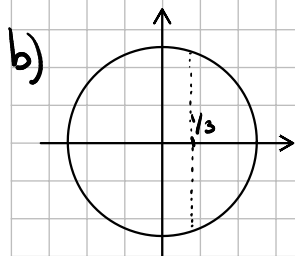
$$\sin x = -\frac{1}{5}, \quad \cos x \geq 0 \quad (\text{car } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right])$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-1/5}{2\sqrt{6}/5} = \frac{-1}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

la tangente de  $x$  vaut  $\frac{\sqrt{6}}{12}$



$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\pm 2\sqrt{2}/3}{1/3} = \pm 2\sqrt{2}$$

la tangente de  $x$  vaut  $2\sqrt{2}$  ou  $-2\sqrt{2}$ .

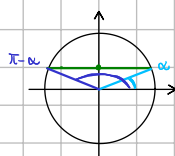
2.14. Résoudre les équations suivantes en  $x$  :

b.  $\sin x - \sin 2x = 0$ ;

h.  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ ;

j.  $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos \frac{1}{2}$ .

b)  $\sin x - \sin 2x = 0$



$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \pi - 2x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2k\pi$$

$$\text{ou } 3x = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{ 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

h)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{3} + x \right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ou } \frac{\pi}{3} + x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{12\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{12} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

j)  $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos(\frac{1}{2})$

CE:  $2x^2 - 1 \in [0; \pi]$   $= \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \arccos(2x^2 - 1) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

2.15. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

a.  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;

f.  $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$  ;

g.  $\operatorname{csc}(\arcsin \frac{1}{2})$  ;

a)  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

⚠ Pas de  $\pi - \alpha$  ni  $+2k\pi$  car la définition de arcsin implique que le résultat appartient à  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

f)  $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g)  $\operatorname{csc}(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sin(\arcsin \frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

2.16. Déterminer la valeur (en fonction de  $x$ ) de chacune des expressions suivantes :

f)  $\tan(\arcsin 5x)$   
 $= \frac{\sin(\arcsin 5x)}{\cos(\arcsin 5x)}$

$= \frac{5x}{\cos(\arcsin 5x)}$

$= \frac{5x}{\sqrt{1 - (5x)^2}}$

$= \frac{5x \sqrt{1 - 25x^2}}{1 - 25x^2}$

CE:  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin 5x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}]$

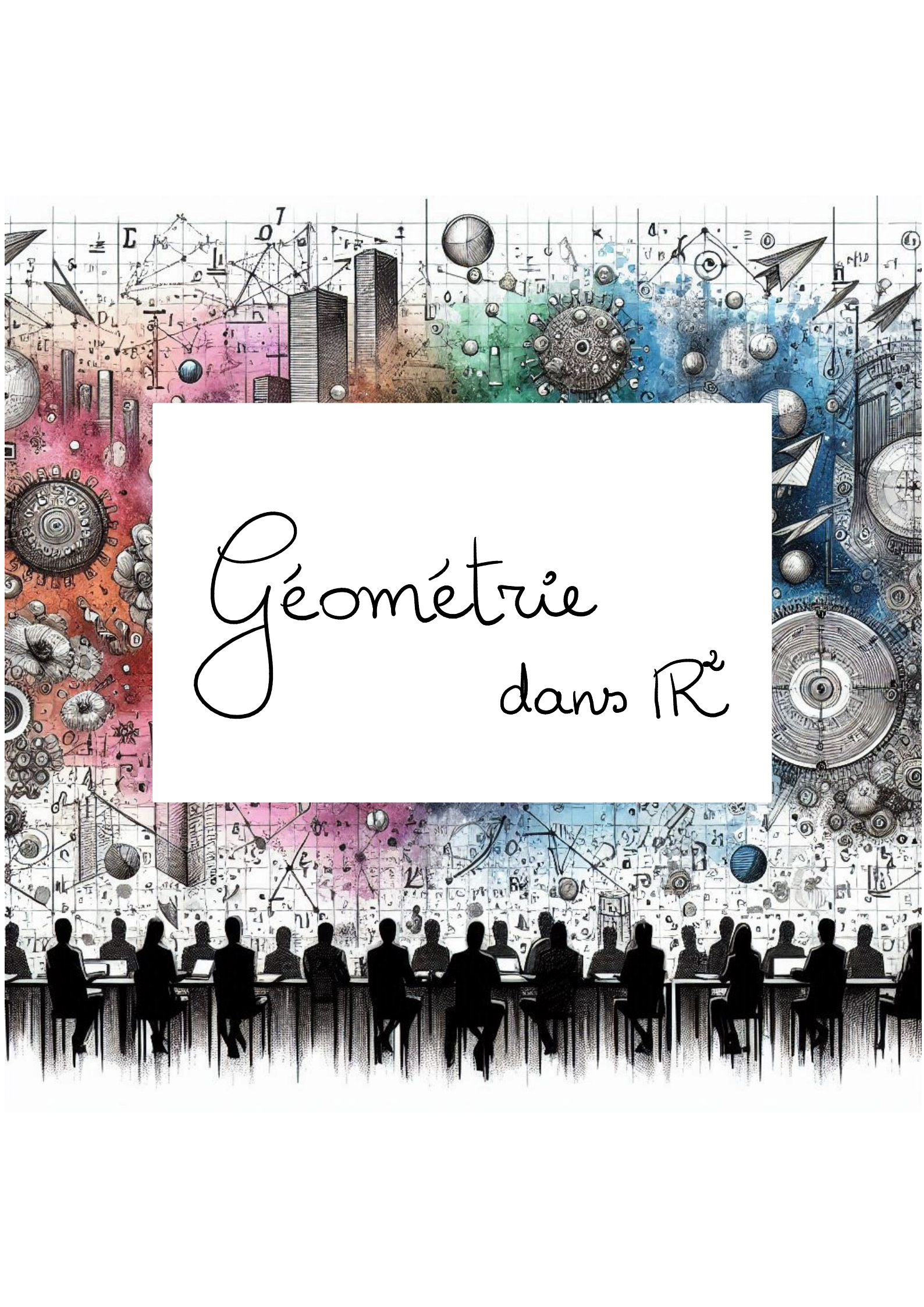
$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2}$

preuve:  $\cos^2(\arcsin y) = 1 - \sin^2(\arcsin y)$   
 $= 1 - (\sin(\arcsin y))^2$   
 $= 1 - y^2$

$\Rightarrow \cos(\arcsin y) = \pm \sqrt{1 - y^2}$

car  $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   
 $\Rightarrow \cos(\arcsin y) \geq 0$ .

avec  $x \in [-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}]$



# Géométrie dans $\mathbb{R}^2$



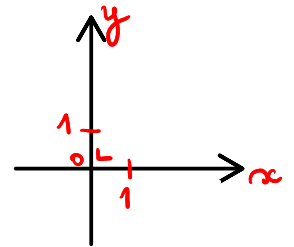
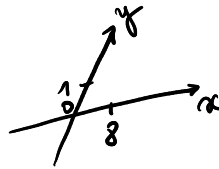
REPÈRE

axes  
+ unités

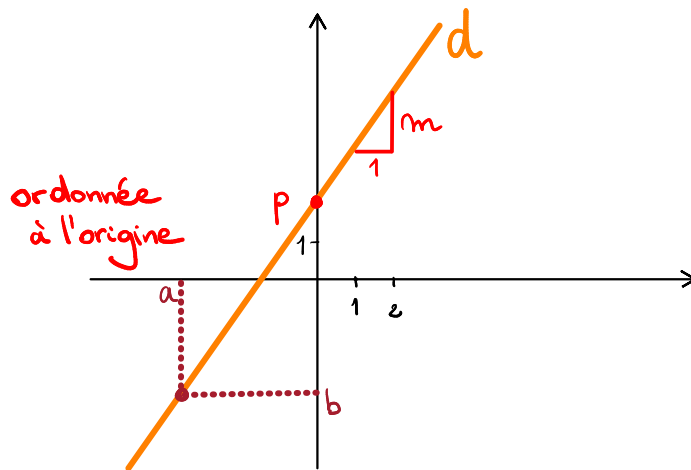
ORTHONORMÉ

⊥

même norme  
pour chaque axe



## DROITES DANS LE PLAN



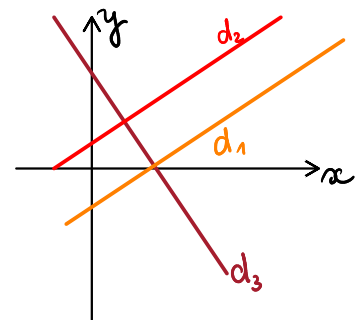
$$d \equiv y = mx + p$$

$\hookrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$d \equiv y - b = m(x - a)$$

$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \text{pentes égales : } m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_3 \Rightarrow \text{pentes inverses et opposées : } m_1 = -\frac{1}{m_3}$$



## EQUATION D'UN CERCLE

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

(a, b)  
centre

R  
Rayon

3.1. On donne les points  $a = (1, 2)$ ,  $b = (4, 4)$  et  $c = (4, 3)$  du plan. Déterminer

- les composantes des vecteurs  $\vec{ab}$  et  $\vec{ba}$ ;
- les coordonnées du milieu du segment  $ab$ ;
- les coordonnées du centre de gravité du triangle  $abc$ .

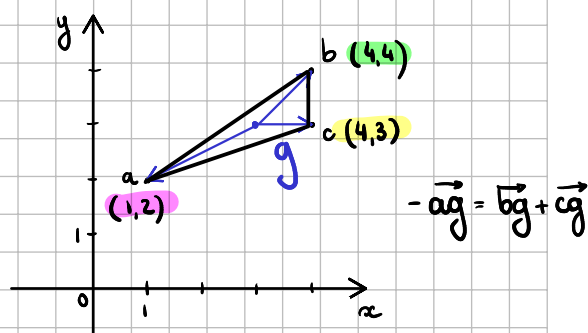
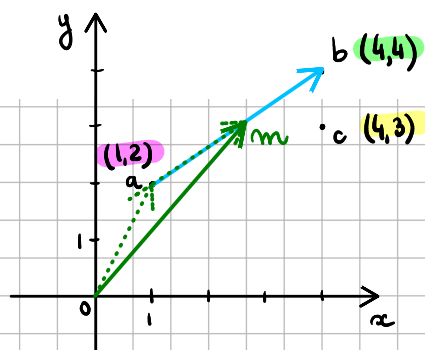
$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{ab} &= \vec{ob} - \vec{oa} = (4, 4) - (1, 2) = (3, 2) \\ \vec{ba} &= -\vec{ab} = -(3, 2) = (-3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \vec{om} &= \vec{oa} + \frac{1}{2} \vec{ab} = \vec{oa} + \frac{1}{2} (\vec{ob} - \vec{oa}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{oa} + \vec{ob}) = \left( \frac{1+4}{2}, \frac{2+4}{2} \right) \end{aligned}$$

Le milieu du segment  $[a, b]$  a pour coordonnées  $(\frac{5}{2}, 3)$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } \vec{og} &= \frac{1}{3} (\vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}) \\ &= \left( \frac{1+4+4}{3}, \frac{2+4+3}{3} \right) \\ &= (3, 3) \end{aligned}$$

Le centre de gravité du triangle  $abc$  a pour coordonnées  $(3, 3)$ .

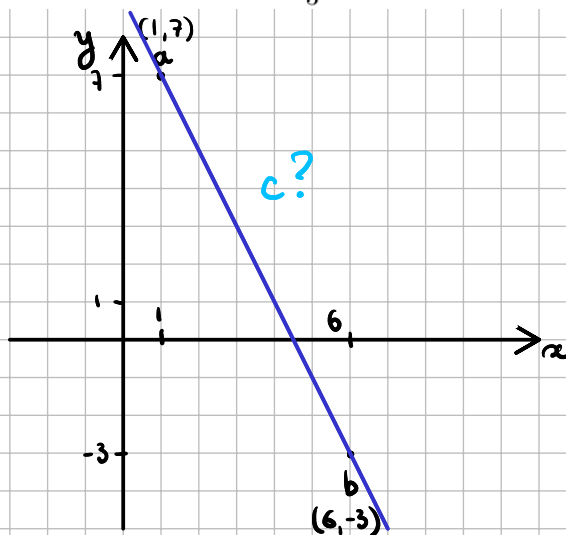


3.3. On donne les points  $a = (1, 7)$  et  $b = (6, -3)$ .

- Déterminer les coordonnées du point  $c$  situé sur la droite  $ab$  et tel que  $\vec{ac} = \frac{2}{3} \vec{cb}$ .

$$\begin{aligned} \vec{ac} &= \frac{2}{3} \vec{cb} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} - \vec{oa} &= \frac{2}{3} (\vec{ob} - \vec{oc}) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} + \frac{2}{3} \vec{oc} &= \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{3} \vec{oc} &= \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{3}{5} \left( \frac{2}{3} \vec{ob} + \vec{oa} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{2}{5} \vec{ob} + \frac{3}{5} \vec{oa} \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \frac{2}{5} (6, -3) + \frac{3}{5} (1, 7) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \left( \frac{12}{5}, -\frac{6}{5} \right) + \left( \frac{3}{5}, \frac{21}{5} \right) \\ \Leftrightarrow \vec{oc} &= \left( \frac{15}{5}, \frac{15}{5} \right) = (3, 3) \end{aligned}$$

Les coordonnées du point  $c$  sont  $(3, 3)$ .

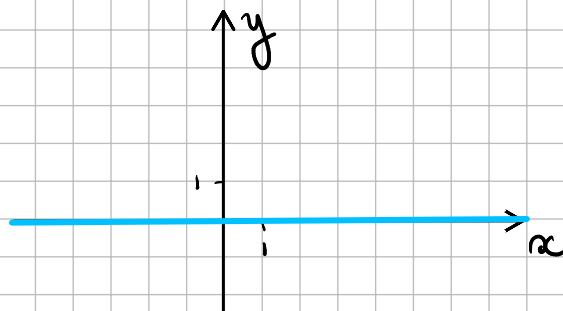


3.5. Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

a. l'axe  $Ox$ ;

L'axe  $Ox$  a pour équation

$$y = 0$$



e. la droite  $d_1$  qui passe par les points  $(1, 4)$  et  $(-1, 2)$ ;

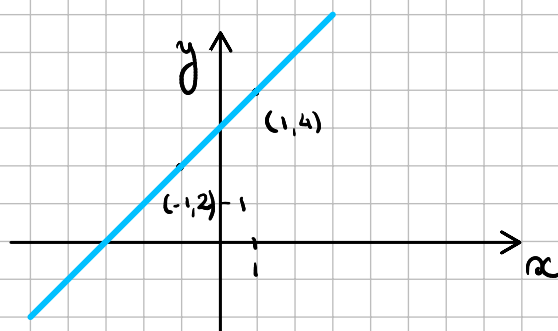
pende :  $\frac{4-2}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$

point de la droite:  $(1, 4)$

équation :  $y - y_p = m(x - x_p)$

$$y - 4 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1 + 4$$



La droite  $d_1$  a pour équation  $d_1 \equiv y = x + 3$

g. la droite  $d_2$  parallèle à la droite d'équation  $x + 3y = -4$  qui passe par le point  $(1, 2)$ .

pende : la même que  $x + 3y = -4$

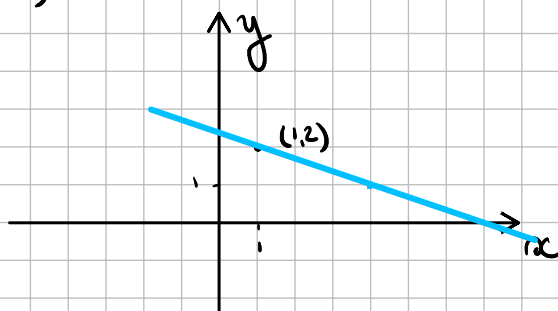
$$x + 3y = -4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(-4 - x)$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

point :  $(1, 2)$

équation :  $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

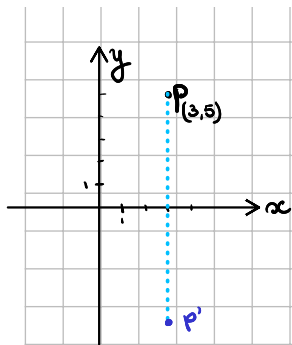
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 2$$



La droite  $d_2$  a pour équation  $d_2 \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

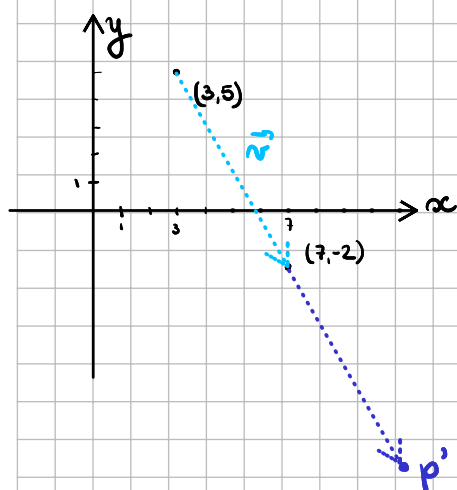
3.9. Soit le point  $p = (3, 5)$  du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de  $p$  par rapport

b. à l'axe  $ox$  ;



Le point symétrique à  $p$  par rapport à l'axe  $Ox$  a pour coordonnées  $(3, -5)$

d. au point  $(7, -2)$  ;



$$\vec{r} : (7, -2) - (3, 5) = (4, -7)$$

$$\vec{op'} : \vec{op} + 2\vec{r} = (7, -2) + \vec{r} = (11, -9)$$

Le point symétrique à  $p$  par rapport au point  $(7, -2)$  est  $(11, -9)$ .

3.15. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0. \quad \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 4x + ? = (x-a)^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = (x-2)^2$$

$$y^2 - 6y + ? = (y-b)^2$$

$$y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2 = (y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 3 = 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Le centre du cercle est  $(2, 3)$  et son rayon est  $4$ .