Fonctions dérivables: définitions et exemples

(Syllabus Chapitre X)

Applications:

La dérivée décrit une variation (changement) mais aussi la vitesse de variation.

- Informatique: les méthodes d'optimisation sur des fonctions de plusieurs variables (dont les paramètres peuvent être liés ou non) en faisant une approximation de la dérivée par le taux d'accroissement, améliorent la rapidité des algorithmes
- Biologie: Calculer les vitesses et accélérations: Par exemple la vitesse de croissance d'une population de bactéries d'une culture qui varie dans le temps.
  Savoir à partir de quel niveau une espèce menacée va disparaître sans action de l'homme.
- Médecine: Croissance d'un enfant jusqu'à l'âge adulte (très rapide ou plus lente selon les périodes).
- Technologie : Choisir la quantité de produits à mettre pour optimiser le rendement d'une machine ou d'un produit.

Applications:

- Industrie: Qui dit accélération dit véhicule, donc dans la vie cela permet de calculer par exemple la distance de freinage d'un véhicule.
  Savoir si le nouveau design d'une voiture ou d'un avion sera plus ou moins efficace (et donc consommateur de carburant)
- Vie courante : L'évolution de la température de votre café matinal (ou thé ou chocolat chaud). C'est un phénomène évolutif qui est décrit par une équation différentielle toute simple où la vitesse de refroidissement (donc la dérivée) est proportionnelle à la différence des températures du café et celle du milieu ambiant ...
- Finance et Economie: Domaine ou les dérivées sont indispensables à tout niveau, entre autre: pour les études de marchés financiers et l'optimisation, choisir les quantités à produire pour avoir le meilleur retour sur investissement.

Applications:

- Physique: exemple: la nature tend souvent à minimiser une énergie, ainsi pour savoir quel sera l'état d'équilibre d'un quelconque système physique on va chercher à minimiser une énergie.
- Astronomie: Calculer la trajectoire d'un astéroide avec la vitesse et l'accelération.
- Géologie et Géographie: Pour cartographier le fond de l'océan, pour cela on un sonar qui envoie des ondes et qui note au bout de combien de temps elles reviennent, elles déduisent la forme du fond grâce aux dérivées.
- Ecologie: Variation de la température (changement climatique); tous les calculs thermiques théoriques passent par les équations différentielles.
  Etudes des moteurs électriques et de la taille du ventilateur à adopter, idem pour les calculs sur les maisons (simplifiés ensuite par de simples résistances thermiques).

Motivation

Aujourd'hui nous parlons d'un des concept les plus important dans l'histoire des mathématiques.

L'idée centrale: Les dérivées décrivent les variations (changements) et la vitesse de variation.

Certaines fonctions sont plus agréables que d'autres, au sens où elles possèdent de meilleures propriétés.
Nous avons déjà vu une de ces propriétés: la continuité. Dans ce chapitre nous décrirons une autre classe de fonctions "agréables" : celle des fonctions dérivables. Et plus généralement, des fonctions plusieurs fois dérivables.

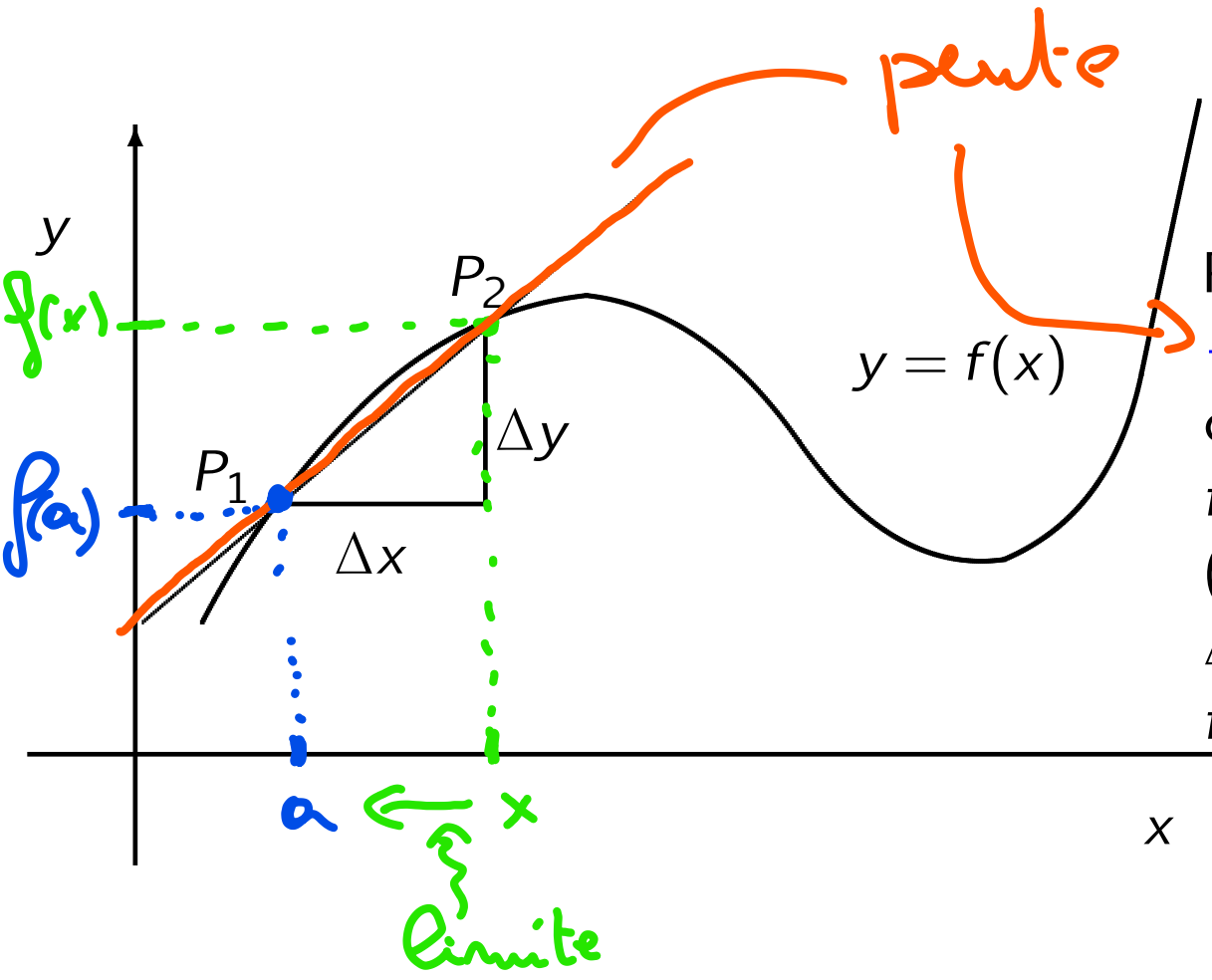
Contenu de la section

Dérivées

Contenu de la section

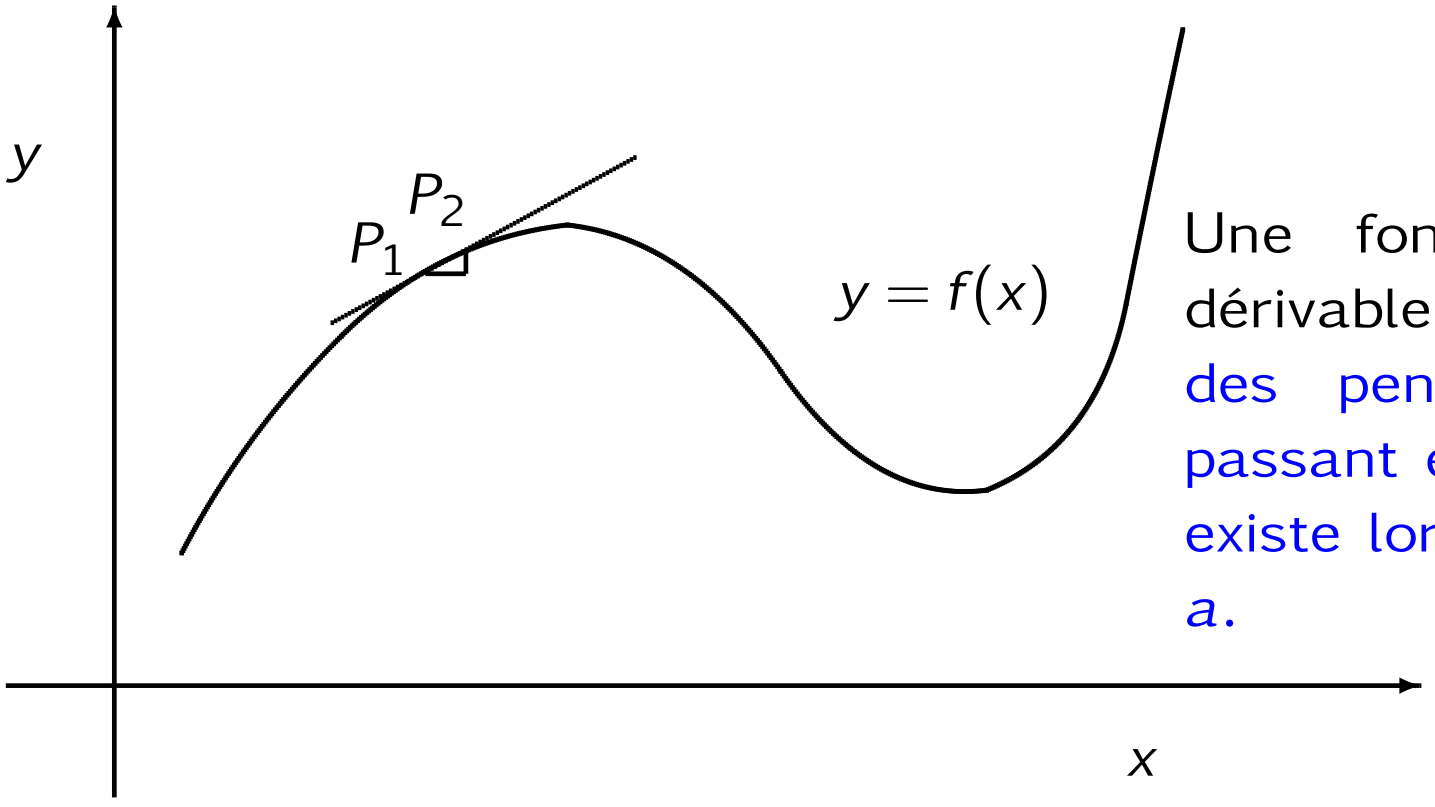
Dérivées
- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Exemples de calculs de dérivées
- Dérivée de fonctions réciproques
- Dérivée seconde, troisième, etc...

Interprétation graphique



Pour $x \neq a$, le nombre $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite passant par $f(a)$ et $f(x)$. Sur ce dessin, $P_1 = (a, f(a))$, $P_2 = (x, f(x))$, $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$.

Interprétation graphique 2



Une fonction est donc dérivable en a si la limite des pentes des droites passant entre $f(x)$ et $f(a)$ existe lorsque x tend vers a.

Définition

Définition

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A (ce n'est pas une extrémité de A). Si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

quotient différentiel.

existe dans $\mathbb{R}$ on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

Quand cette limite existe, on dit que f est *dérivable* au point a, ou encore que $f'(a)$ existe.

Exemple

Si $f(x) = x$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ le nombre dérivé de f en a est 1.
En effet, si $x \neq a$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Dès lors lorsque $x \to a$, la limite existe et vaut 1.

On notera donc $f'(a) = 1$, ou $f'(x) = 1$.

- Si $f(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ fct cste

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{C - C}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a.
On choisira de calculer l'expression la plus simple en fonction du contexte donné.

Etant donnée f une fonction dérivable, la notion de dérivabilité ci-dessus donne lieu à une nouvelle fonction, notée f', qui à chaque valeur x associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire $f'(x)$.

Définition

Cette fonction f' est appelée la fonction dérivée de f.

Contenu de la section

Dérivées
- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Exemples de calculs de dérivées
- Dérivée de fonctions réciproques
- Dérivée seconde, troisième, etc...

Dérivabilité implique continuité

On commence par démontrer le résultat suivant:

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Preuve

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ *existe et vaut alors le nombre réel* $f'(u)$. *On écrit alors que, pour tout* $x \neq u$:

$$f(x) = f(x) - f(u) + f(u) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u).$$

On a fait apparaître artificiellement le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$.

On peut alors passer à la limite :

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u}\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u)+f(u)\right) = f'(u)0 + f(u) = f(u).$$

Donc la fonction est continue en u.

□

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f'+g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. *Sur un domaine où g ne s'annule pas :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Ces propriétés sont vraies en tout point où f et g sont dérivables (et où g ne s'annule pas pour la dernière).

Nous allons détailler la preuve de 3 (les autres sont dans le syllabus).

Résultat

(3) Si f et g sont des fonctions dérivables en u, alors
$(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Preuve

On calcule le taux d'accroissement de fg en essayant de faire apparaître les taux d'accroissement respectifs de f et g:

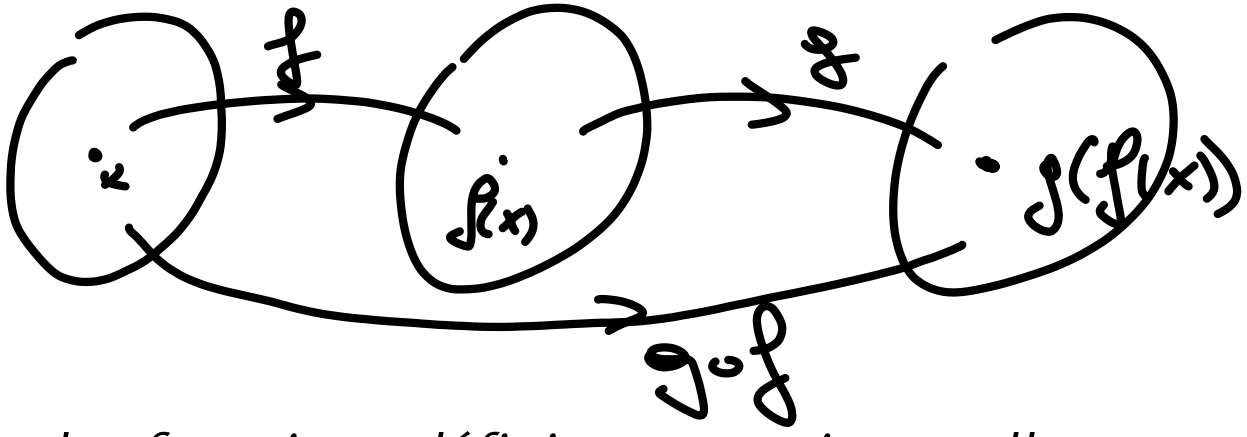
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(u))+(f(x)-f(u))g(u)}{x-u}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(u)}{x-u}+\frac{f(x)-f(u)}{x-u}g(u) =\end{aligned}$$

Comme f et g sont dérivables on peut alors passer à la limite:

$$\lim_{x\to u}\frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} = f(u)g'(u)+f'(u)g(u).$$

□

Dérivation de fonctions composées



Résultat

Si f et g sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici mais l'appliquerons ensuite.

Contenu de la section

Dérivées
- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Exemples de calculs de dérivées
- Dérivée de fonctions réciproques
- Dérivée seconde, troisième, etc...

Dérivées des fonctions puissances

Résultat

Soit n un entier naturel. La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

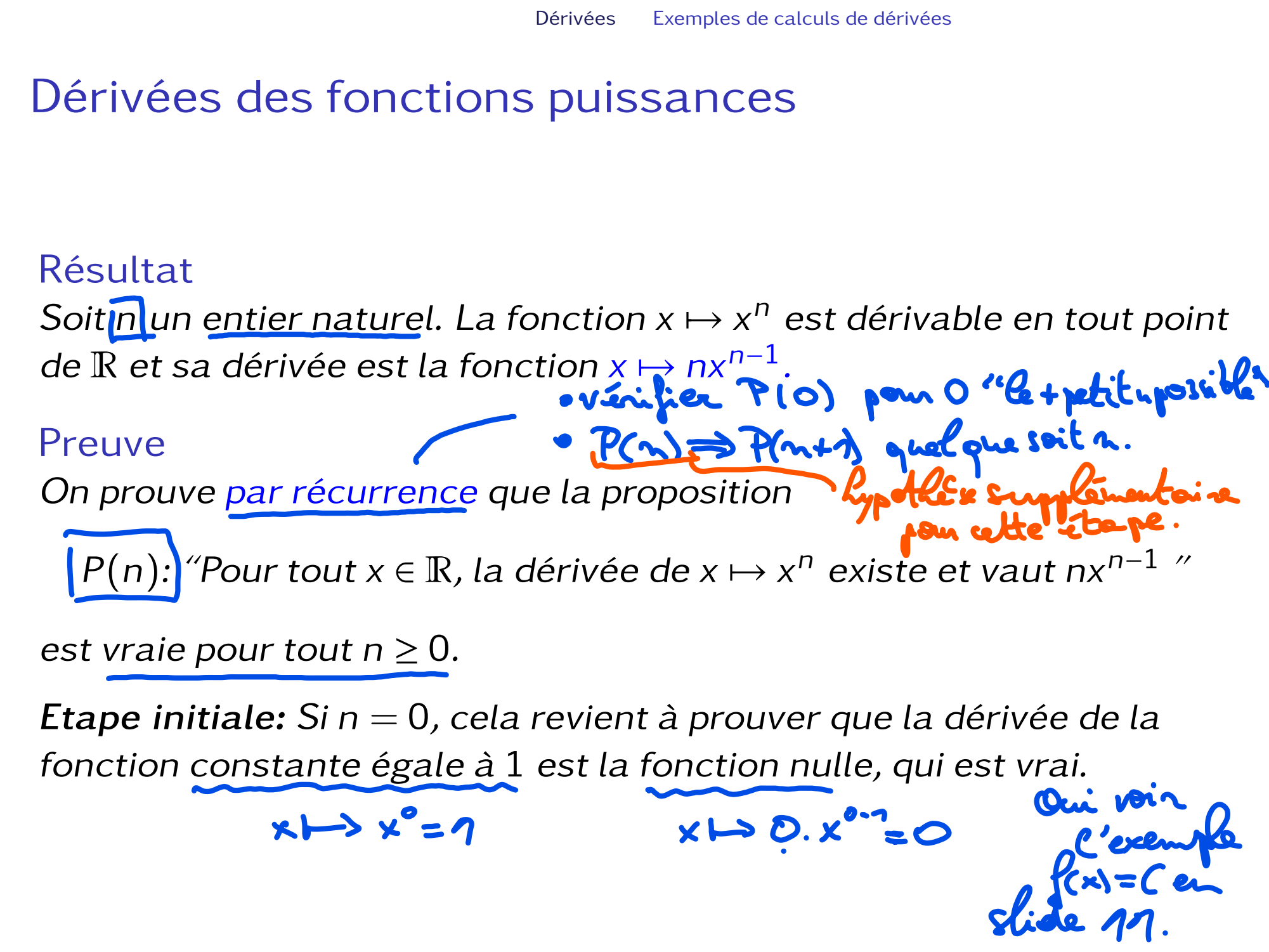
Preuve

On prouve par récurrence que la proposition

$P(n)$: "Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto x^n$ existe et vaut nx^{n-1} "

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Etape initiale: *Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction constante égale à 1 est la fonction nulle, qui est vrai.*



$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Preuve (suite)

Hypothèse: *Fixons $n \geq 0$ et supposons que $P(n)$ est vraie. On suppose donc que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur de n fixée, en tout point x de $\mathbb{R}$.*

Thèse: *Pour montrer $P(n+1)$ on doit calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$.* Objectif : obtenir $(n+1)x^{n+1-1} = (n+1)x^n$.

On applique la règle de la dérivée du produit: $x' = 1$ voir slide 11.

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1}$$

↑ formule dérivée d'un produit

hypothèse de récurrence : $P(n) : (x^n)' = nx^{n-1}$.

$$= x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

ce qui est bien la formule attendue pour $n+1$.

□

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ et soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$.
Alors f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Preuve (Preuve incomplète)

On calcule le taux d'accroissement:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

On admet que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a),$$

Alors la limite de $\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ existe lorsque $h \to 0$ et on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \ln(a) a^x.$$

Dérivée des fonctions exponentielles 2

Une conséquence importante est la suivante: comme $\ln(e) = 1$, la dérivée de la fonction exponentielle $\exp(x)$ est elle-même:

$$(e^x)' = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou encore, avec d'autres notations:

$$(\exp)'(x) = \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dérivées de sin, cos et tan

On admet que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées en tout point $x \in \mathbb{R}$ sont données par:

$$(\sin)'(x) = \cos(x) \text{ et } (\cos)'(x) = -\sin(x).$$

On peut en déduire la dérivée de la fonction tangente avec la règle du quotient: $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$(\tan)'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x)$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2}$$

$$= 1 + \tan(x)^2.$$

2 formules pour tan'

dérivée d'un quotient.

relat° fonda

$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$

Contenu de la section

Dérivées
- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Exemples de calculs de dérivées
- Dérivée de fonctions réciproques
- Dérivée seconde, troisième, etc...

Dérivée de fonctions réciproques

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en $a \in A$ avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a) \in B$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Posons maintenant $y = f(a)$, donc $a = f^{-1}(y)$. Alors la proposition ci-dessus dit que f^{-1} est dérivable en y avec

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Nous ne le prouverons pas non plus ici mais en donnons une application au calcul de la dérivée de $\ln(x)$.

dérivée des fct composées

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

□

Application: dérivée de ln

Exemple

La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$ on a

$$\left(\ln\right)'(x) = \frac{1}{x}.$$

Preuve

On sait que ln *est la réciproque de* exp, *car* $\exp(\ln(x)) = x$, $\forall x \in]0, +\infty[$. *Et* $\exp'(y) = \exp(y) > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. *Dès lors:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

On aurait aussi pu retrouver ce résultat en dérivant la relation $\exp(\ln(x)) = x$ *pour tout* $x > 0$ *avec la formule de dérivation des fonctions composées.*

Ce qu'on a fait sur la slide précédent.

Dérivée de fonctions puissance générales

Soit a un nombre réel. On définit la fonction $]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^a$ par

$$x^a = \exp(a \ln(x)) = e^{a \ln(x)}.$$

Résultat

Cette fonction est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ *et sa dérivée est* $x \mapsto ax^{a-1}$ $\forall x > 0$. [Ne peut pas se prouver par récurrence $\forall a \in \mathbb{R}$]

C'est donc une généralisation de la dérivée des fonctions puissance.

Preuve

On écrit que, $\forall x > 0$*:*

$$x^a = \exp(a \ln(x)).$$

En dérivant cette dernière expression avec la règle des fonctions composées on trouve:

$$(x^a)' = a\frac{1}{x}\exp(a \ln(x)) = a\frac{1}{x}x^a = ax^{a-1}.$$

$\hookrightarrow [\exp(a\ln(x))]' = \exp'(a\ln(x)) \cdot (a\ln(x))'$

□

Contenu de la section

Dérivées
- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Exemples de calculs de dérivées
- Dérivée de fonctions réciproques
- Dérivée seconde, troisième, etc...

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez parfois les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Ou, ayant écrit $y = f(x)$:

- $y'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$

Dérivées d'ordres successifs

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$.
Supposons que

- f est dérivable dans $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

alors on définit la *dérivée seconde*, notée f'' par :

$$f''(x) = (f')'(x); \qquad x \in]a,b[$$

Si f'' admet à son tour une dérivée dans $]a,b[$, on l'appelle *dérivée troisième*, notée f''' ou f^{3} ou $f^{(3)}$

On peut définir ainsi de suite une dérivée d'ordre n pour tout entier naturel n comme:

$$f^{(n+1)} = (f^{n})',$$

par récurrence, à partir du moment où f^{n-1} est dérivable.