$f : [c;d] \to \mathbb{R}$, $a \in]c,d[$

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

- Modélisation de phénomènes...
- Règles de calcul.

Ls Nouvelle fct : $f'(x)$ fct dérivée.

Fonctions dérivables: applications à l'étude des variations d'une fonction

(Syllabus Chapitre XI, sauf la partie 5)

Contenu de la section

Dérivées et variations des fonctions

Contenu de la section

Dérivées et variations des fonctions
Extrema locaux
Théorème de Rolle et applications
Croissance et décroissance
Règle de l'Hospital

Définition

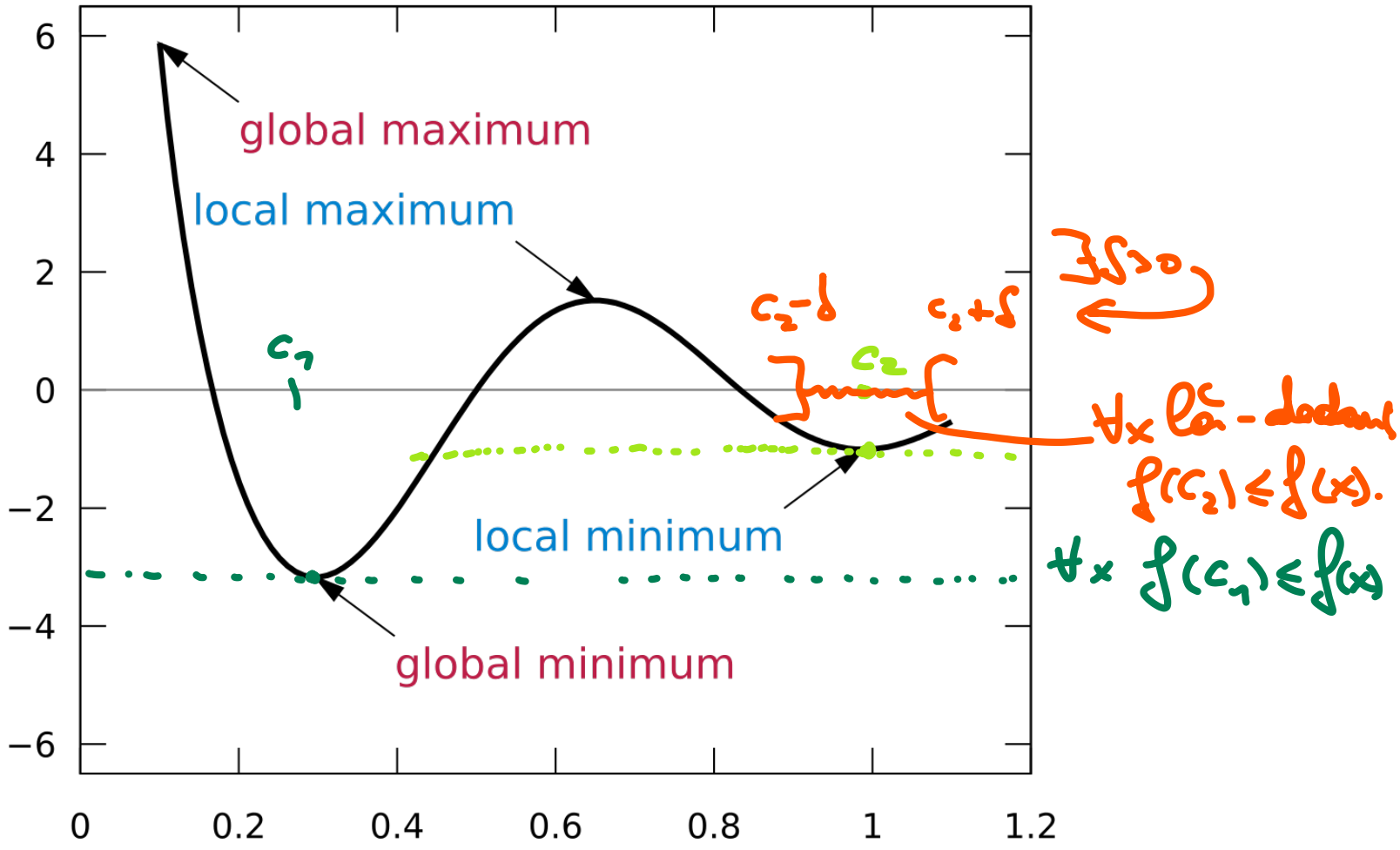
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et c un point de $[a,b]$. Ce point est

- un *minimum* global de f si $f(c) \leq f(x), \forall x \in [a,b]$;
- un *maximum* global de f si $f(c) \geq f(x), \forall x \in [a,b]$;
- un *minimum local* de f si $\exists \delta > 0$ tel que $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$;
- un *maximum local* de f si $\exists \delta > 0$ tel que $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$.

Un *extremum*, qui peut être local ou global, est un point qui est soit un maximum, soit un minimum.

Quand on dit que a est un minimum local de f, on entend que a n'est un minimum que dans une petite région autour de a: si on s'éloigne d'autres minima (de valeur inférieure!) peuvent apparaître.

Un dessin



Dans ce cas particulier le point de maximum global de f est atteint à l'extrémité du domaine (et non à l'intérieur!).

Dérivées et extrema

La dérivée d'une fonction nous permet de détecter les éventuels extrema:

Théorème (Extrema et dérivée)

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est dérivable en $a \in]c, d[$ et a est un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

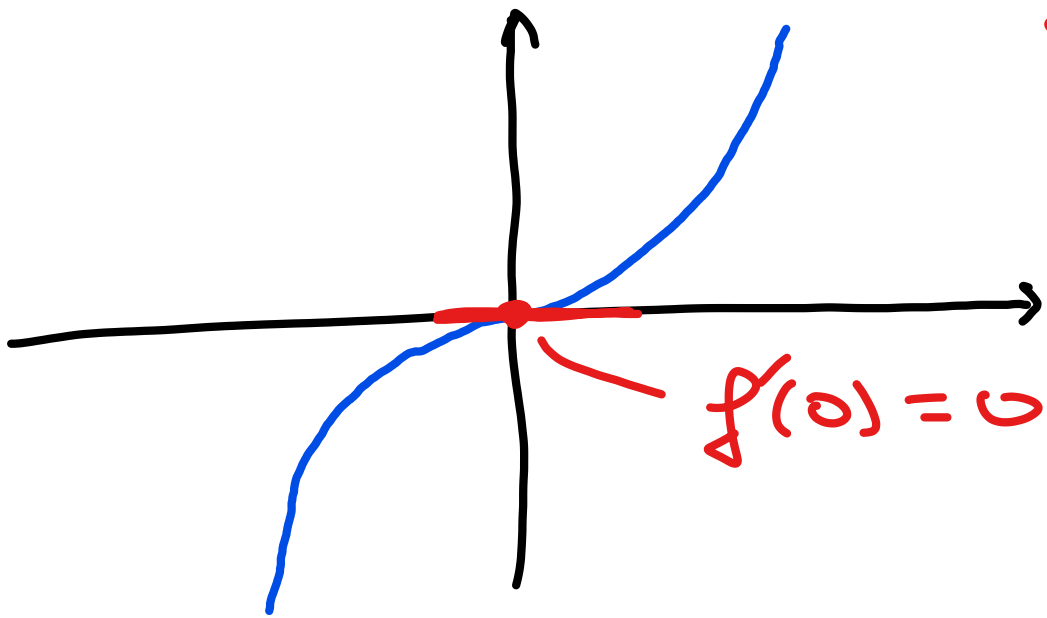
En d'autres termes: la tangente en un point de maximum ou de minimum qui est intérieur au domaine est horizontale.
Comme le montre le dessin précédent, ce n'est plus le cas en général si l'extremum est atteint sur le bord du domaine.

On admettra ce résultat (PAS de démonstration dans ce cours).

Dérivées et extrema

Attention ce n'est pas une équivalence: $f(x) = x^3$ a une dérivée en 0 mais pas d'extremum.

$f'(x) = 3x^2$



Le résultat dit que les solutions de l'éq $f'(x)=0$ sont des CANDIDATS extremum.

Contenu de la section

Dérivées et variations des fonctions
- Extrema locaux
- Théorème de Rolle et applications
- Croissance et décroissance
- Règle de l'Hospital

Théorème de Rolle

Ce théorème dit que, sous des conditions naturelles, une fonction dérivable admet toujours un point intérieur de dérivée nulle:

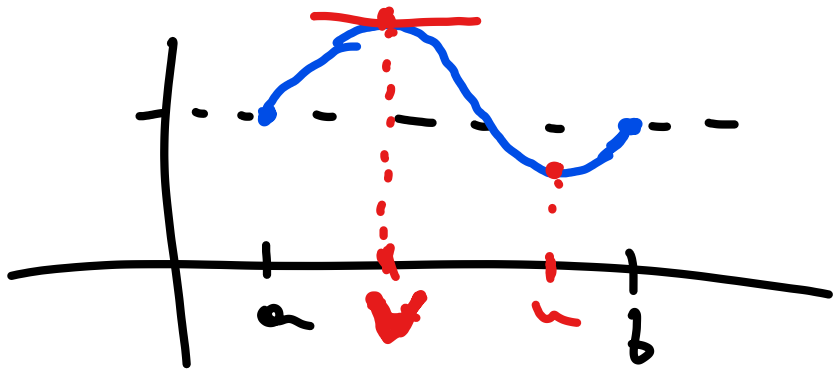
Théorème (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$)
- dérivable dans $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

lequel ? le théo ne le dit pas !



Théorème de Rolle

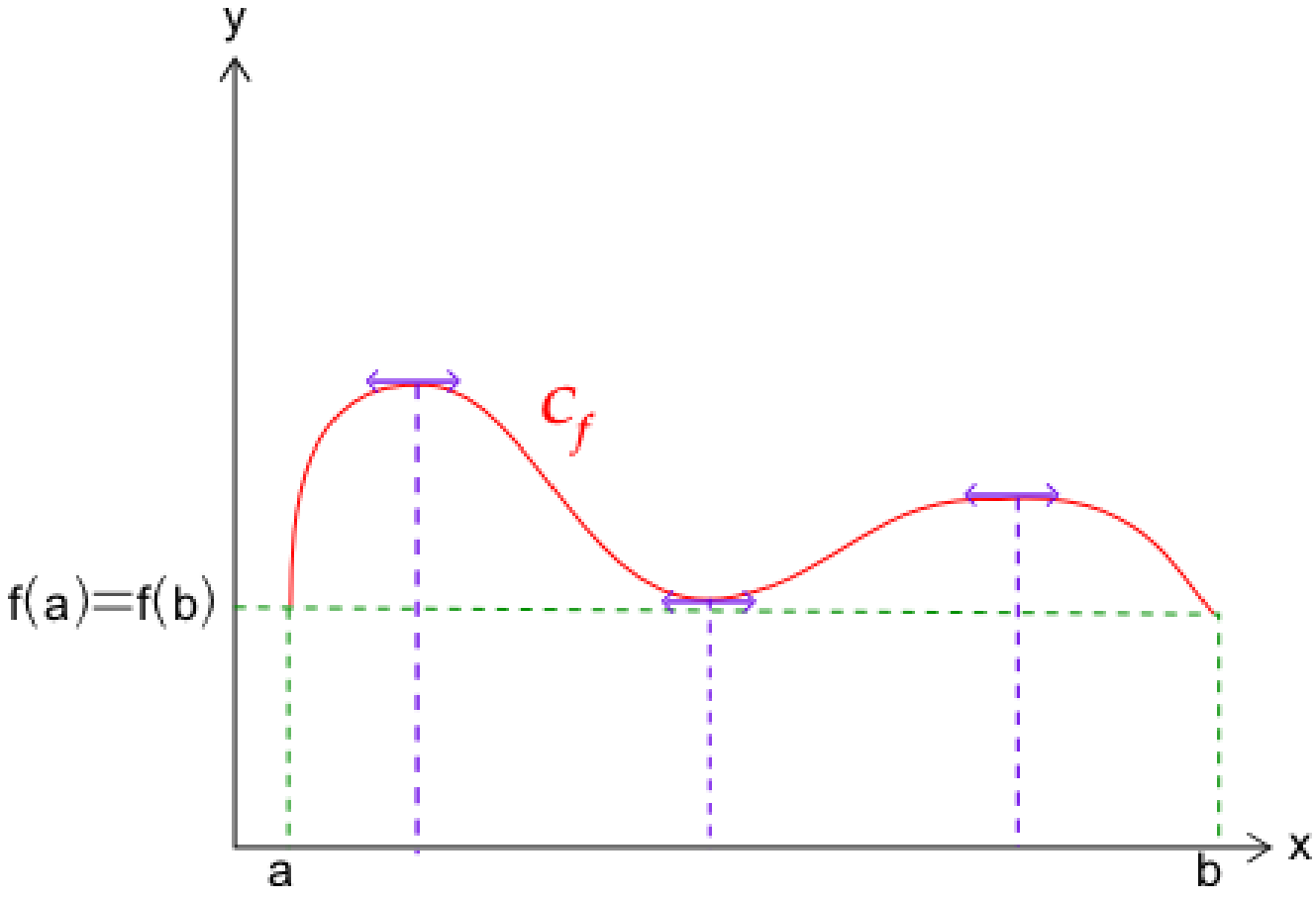
Preuve

f est continue sur l'intervalle **fermé** $[a,b]$*, donc admet un minimum* $f(u)$ *et un maximum* $f(v)$ *pour certains* $u, v \in [a,b]$.

- *Si u et v sont tous les deux sur les bords (a et b), alors f est constante, puisqu'on suppose* $f(a) = f(b)$*. Et donc sa dérivée est nulle en tout point.*
- *Si f n'est pas constante, l'un des deux (u ou v) est donc dans* $]a,b[$.
  Disons u (ça serait pareil si c'était v).
  Mais alors f atteint un minimum en un point intérieur à son domaine (où elle est dérivable) , et donc $f'(u) = 0$.

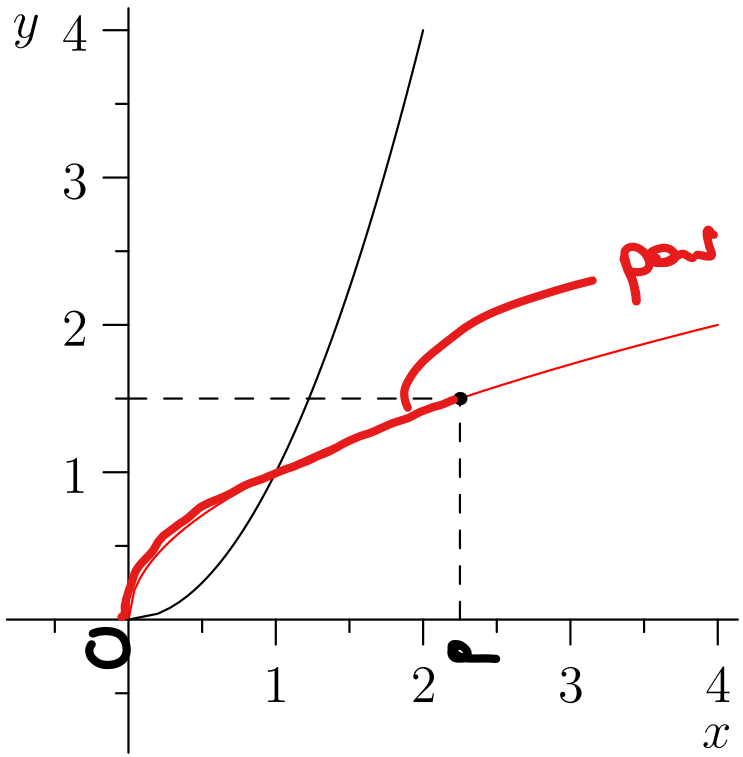
□

Un dessin



Un contre-exemple si $f(a) \neq f(b)$

Dans le théorème de Rolle l'hypothèse $f(a) = f(b)$ est essentielle. Voici les graphes de $x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) et $x \mapsto x^2$ (en noir).



Peu importe l'intervalle $[0, a]$, $a > 0$ qu'on choisira, il n'existe pas de point $c \in]0, a[$ où leur dérivée s'annule.
Car les valeurs en 0 et en a ne sont pas les mêmes.

Théorème des accroissements finis

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont différents, et le théorème de Rolle ne s'applique pas, on a le résultat suivant:

Théorème (Théorème des accroissements finis)

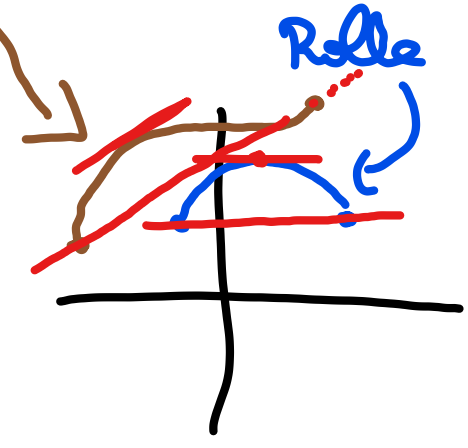
f une fonction

- continue sur $[a, b]$ et
- dérivable dans $]a, b[$.

Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On ne donnera pas la preuve ici.

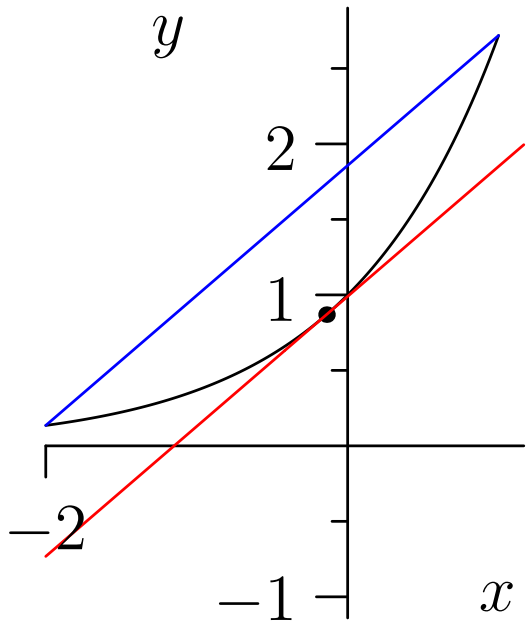


Théorème des accroissements finis: interprétation géométrique

Dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

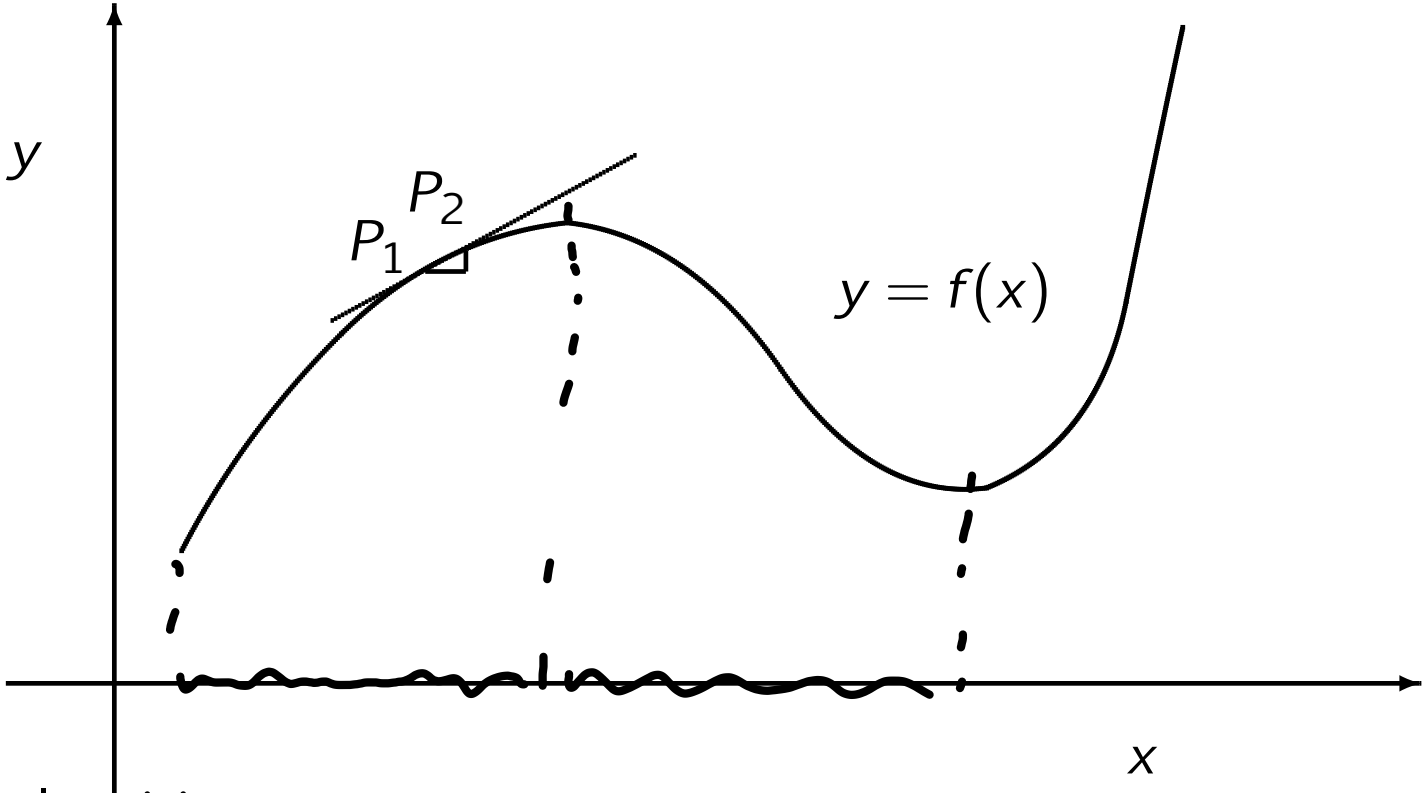
revient à dire qu'il existe toujours un point du graphe en lequel la tangente est parallèle à la droite liant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Contenu de la section

Dérivées et variations des fonctions
- Extrema locaux
- Théorème de Rolle et applications
- Croissance et décroissance
- Règle de l'Hospital

Nous avons introduit le nombre dérivé comme la pente de la tangente (géométrique) au graphe de la fonction.



Intuitivement,

- si la dérivée est positive, la fonction doit donc "monter" (être localement croissante),
- si la dérivée est négative, la fonction doit donc "descendre" (être localement décroissante).

Signe de la dérivée et croissance

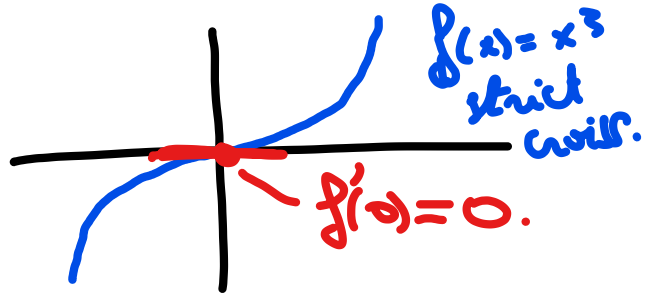
Voici une version rigoureuse de ce résultat.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Supposons de plus que f est dérivable en tout point de I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I;
- $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I;
- $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est décroissante sur I.

Mais, f strict croiss $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ $\forall x$



Preuve

On va montrer uniquement le premier point : on suppose que $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$*, et on va montrer que* f *est strictement croissante sur* I*.*

Soient donc x, y *avec* $x < y$*. Comme* f *est continue sur l'intervalle* $[x, y]$ *et dérivable sur l'ouvert* $]x, y[$*, on peut appliquer le théorème des accroissements finis , et en déduire l'existence de* $c \in]x, y[$ *avec*

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

Or $f'(c) > 0$ *et* $y - x > 0$ *et donc*

$$f(y) - f(x) = (y - x) f'(c) > 0.$$

C'est-à-dire que f *est strictement croissante sur* I*.*

le sens de l'inégalité ne change pas.

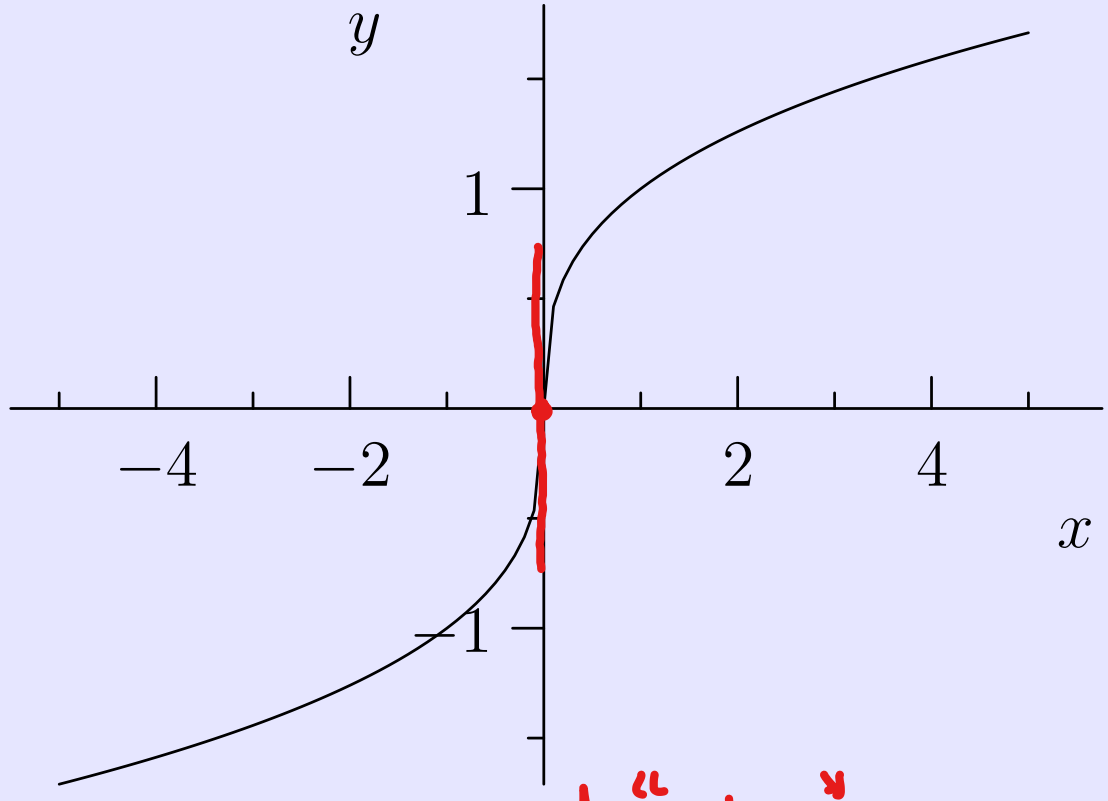
$\forall x, y : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(y) - f(x) > 0$

□

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_0$. Sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_0$.



pente "$= \pm\infty$"

En 0, la tangente est verticale, ce qui explique que la dérivée n'existe pas (le taux d'accroissement a une limite infinie).

Une application: montrer qu'une fonction est bijective

Injectif: $\forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Strictement croissante (déc.): $\forall x, y \in \mathrm{Dom}\, f : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $>$)

Résultat

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors

f est une bijection entre $]a, b[$ et

$$\left]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)\right[$$

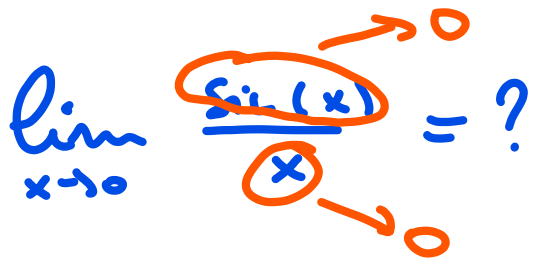
$$(resp.)\left]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)\right[.$$

En particulier: si f est dérivable sur I et $f'(x) > 0, \forall x \in I$, f est une bijection entre $]a, b[$ et $]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$.

Application: la fonction tangente vérifie $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2 \geq 1$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. tan est donc une bijection strictement croissante entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Contenu de la section

Dérivées et variations des fonctions
- Extrema locaux
- Théorème de Rolle et applications
- Croissance et décroissance
- Règle de l'Hospital



Le théorème suivant est une règle pratique pour calculer certaines limites (formes indéterminées) facilement.

Théorème (Règle de l'Hospital)

Supposons que f et g soient dérivables sur $]a-\delta, a+\delta[$ et $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$ (*sauf peut-être pour $x = a$*). Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

↑
le quotient des dérivées
et pas la dérivée du quotient

Remarque

- Le théorème reste valable si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ sont toutes les deux infinies,
- et également si la limite est prise en $\pm\infty$ au lieu d'être prise en un réel a.

La démonstration est omise.

Exemples

Exemple

- Exemple avec une limite infinie en l'infini :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\ln(x)+x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)+1}{2}=+\infty$$

- Un exemple sans fraction (elle est cachée!)

$$\lim_{x\to 0}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}-x=0$$

- Une conséquence avec un exposant

$$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}\exp(\ln(x^x))=\lim_{x\to 0}\exp(x\ln(x))=\exp 0=1$$

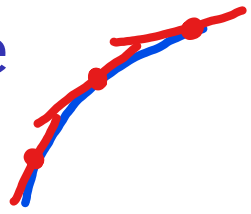
Contenu de la section

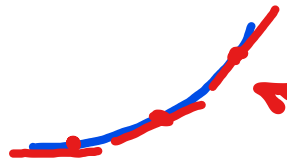
étude de fonction

Contenu de la section

étude de fonction
Interprétation de la dérivée seconde
Asymptotes

Dérivée seconde





Si f est deux fois dérivable, sa *dérivée seconde* en un point a est liée à la concavité en a, c'est-à-dire la tendance qu'ont les tangentes de f d'être

- sous le graphe de f (concavité tournée vers le haut) ou
- au dessus du graphe de f (concavité tournée vers le bas).

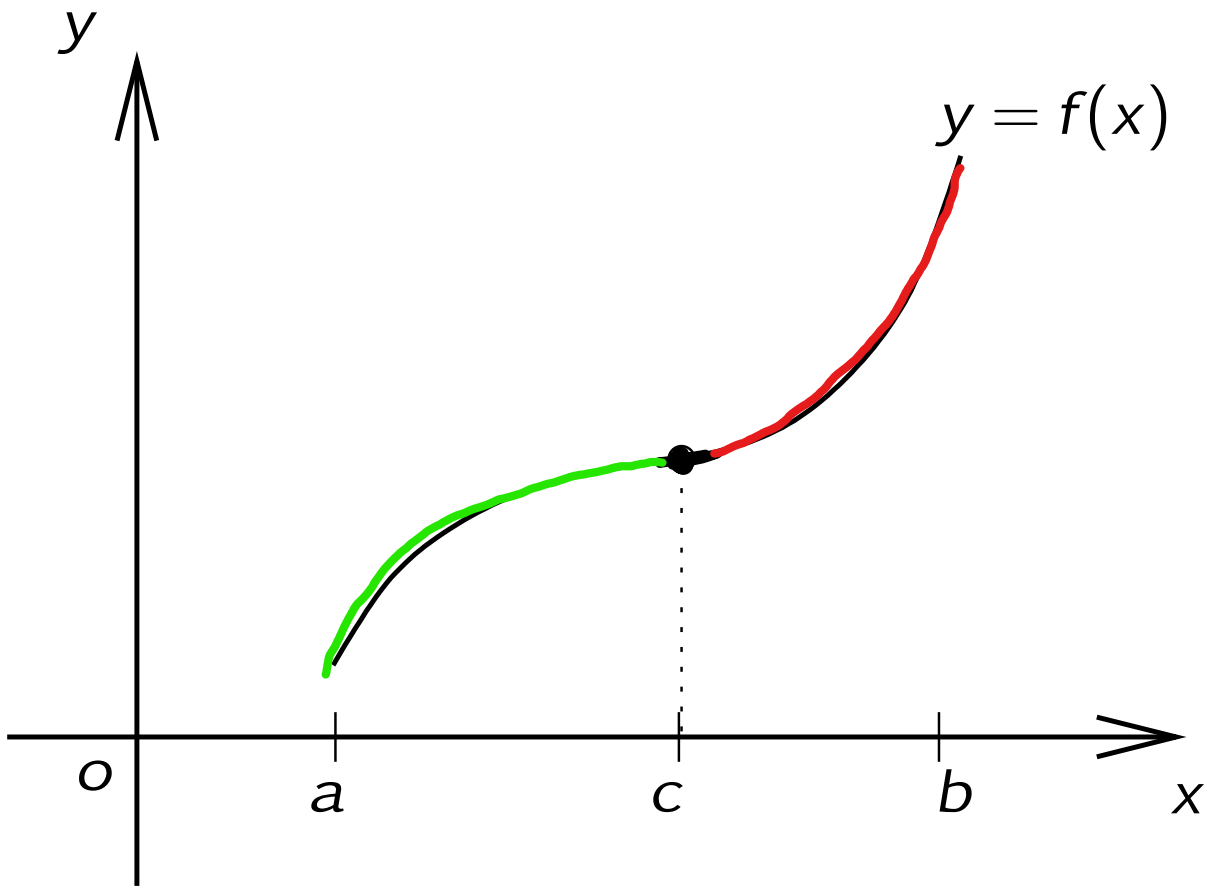
Plus précisément:

- Si $f''(a) > 0$, la dérivée est croissante, donc la pente de la tangente a tendance à remonter près de a. Donc la concavité en a est tournée vers le haut.
- Inversement, $f''(a) < 0$ indique une concavité tournée vers le bas.

Dérivée seconde

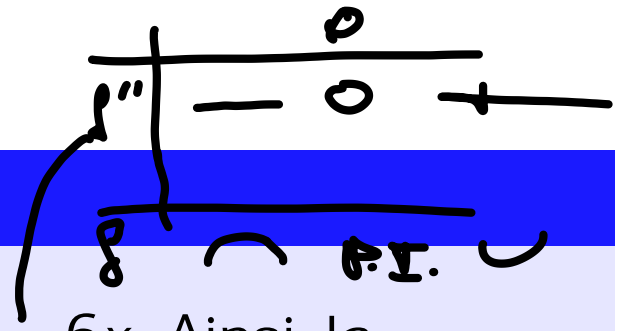
Définition

Lorsque f'' s'annule en changeant de signe en un point c, alors la concavité du graphe de f change en c. On dit que c est un *point d'inflexion* de f.



Sur $[c, b]$ on a $f''(x) > 0$, et sur $[a, c]$ on a $f''(x) < 0$.Et $f''(c) = 0$.

Exemples



Exemple

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. Ainsi, la concavité de f est vers le haut sur $]0, +\infty[$ et vers le bas sur $]-\infty, 0[$. Et 0 est point d'inflexion.

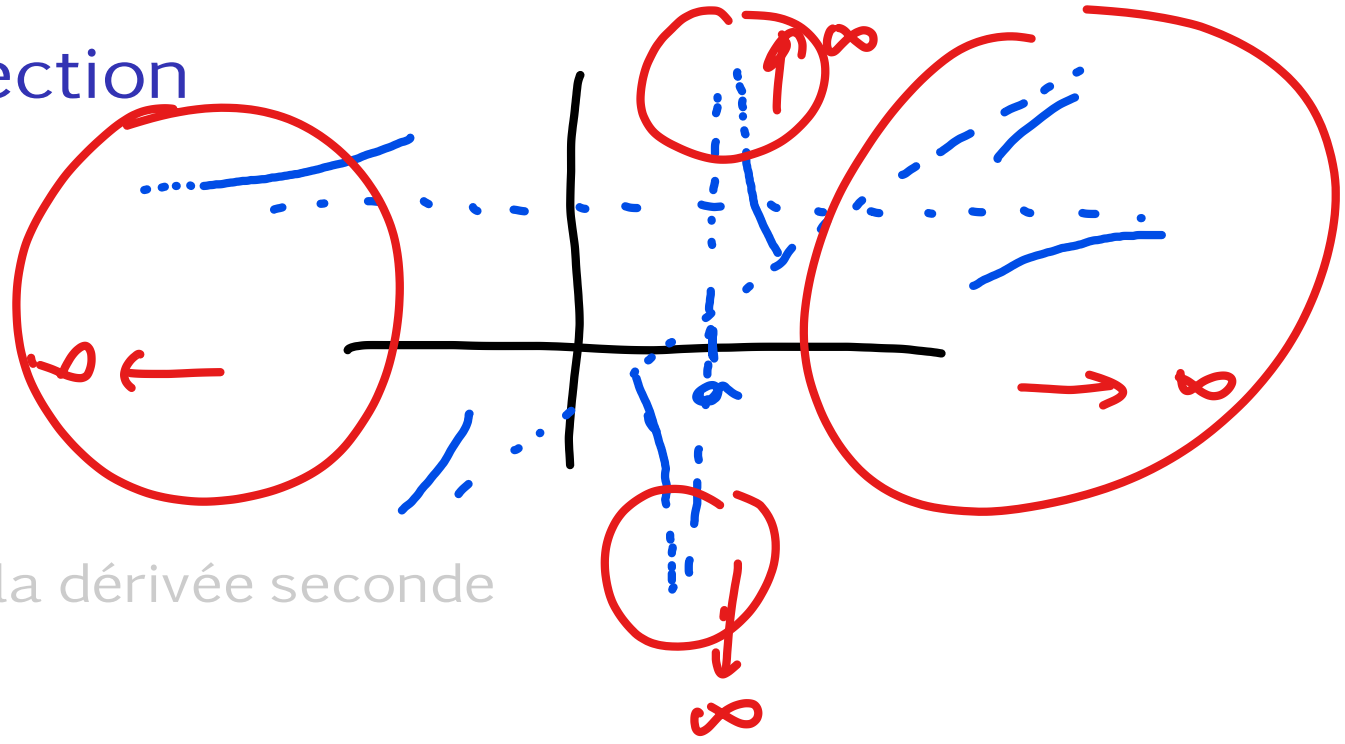
- $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$: sa concavité est toujours vers le bas. En effet: $g'(x) = \frac{1}{x}$ et donc

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

sur $]0;+\infty[$

→ $\ln(x)$ strictement croissant et concavité tournée vers le bas.

Contenu de la section



étude de fonction
Interprétation de la dérivée seconde
Asymptotes

Définition

Une asymptote est une droite de laquelle le graphe d'une fonction donnée "se rapproche".

On distingue généralement les asymptotes

- verticales,
- horizontales et
- obliques.

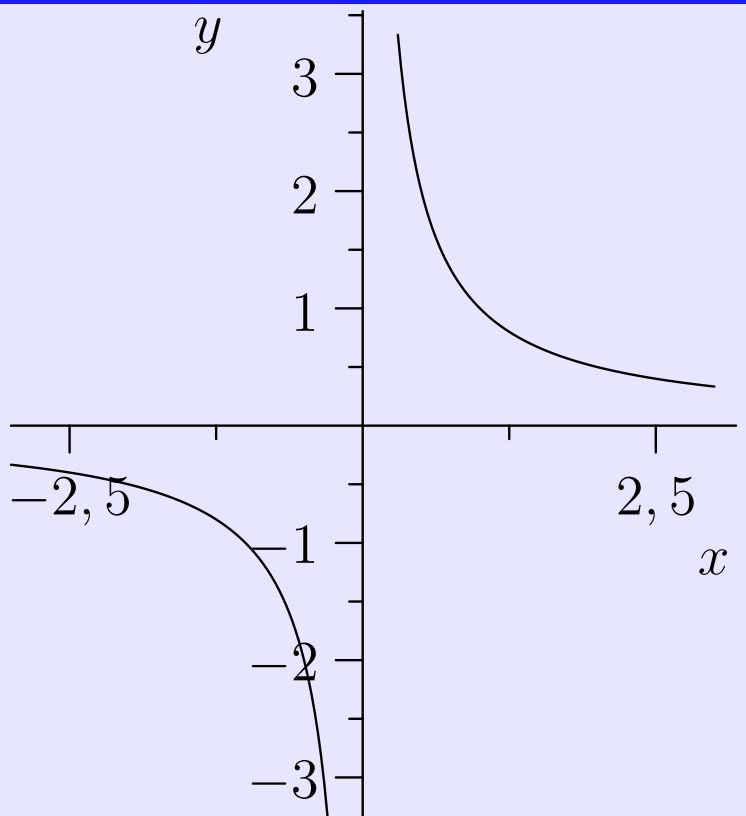
Dans la suite nous considérons une fonction réelle f.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* au graphe de f si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Exemple

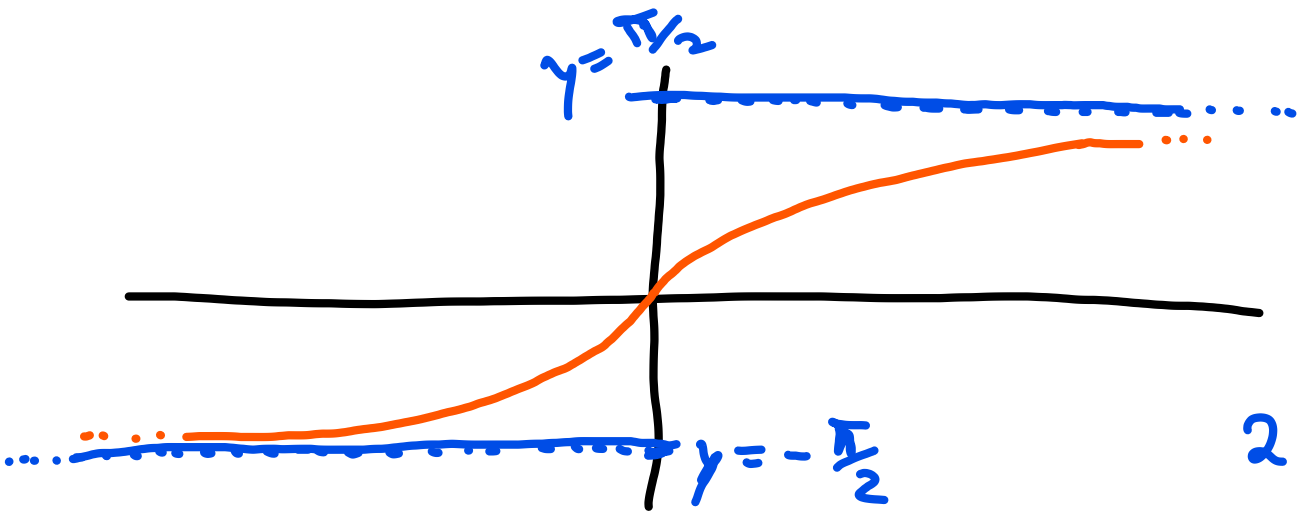


La droite $x = 0$ est asymptote verticale au graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition

La droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* au graphe de f lorsque

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$



arctan(x).

2 asymptotes hor $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$.

Exemple

- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale (tant en $+\infty$ qu'en $-\infty$) au graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale (tant en $+\infty$ qu'en $-\infty$) au graphe de $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

Asymptote oblique

Définition

La droite d'équation $y = mx + b$ où $m \neq 0$ est une *asymptote oblique* au graphe de f si

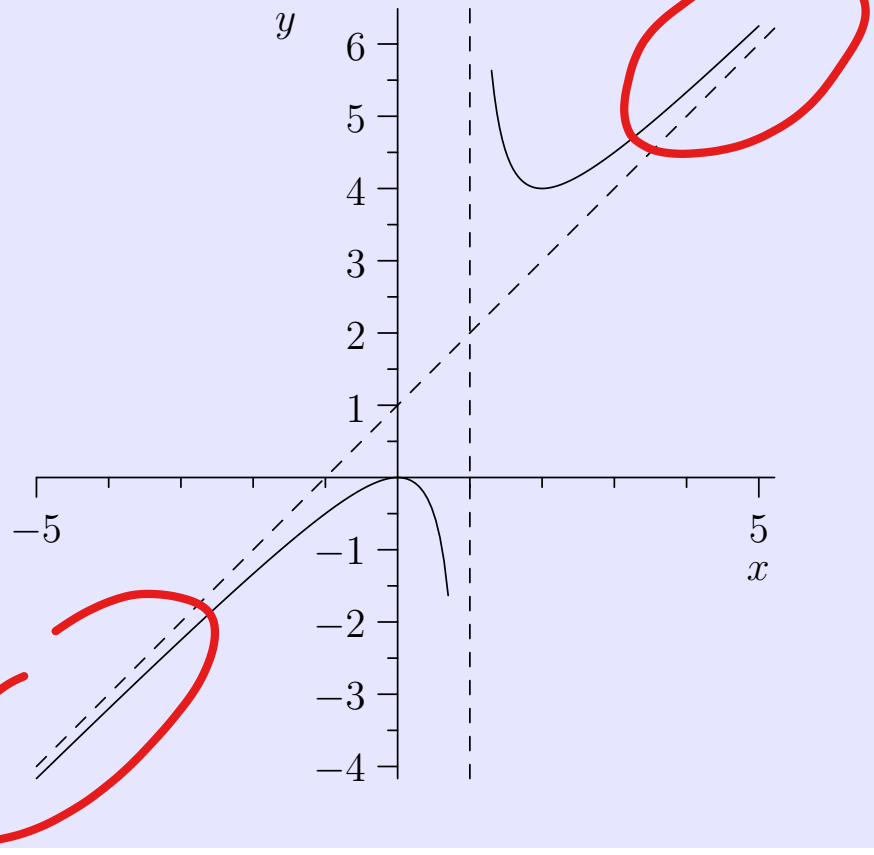
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

C'est le fait que $m \neq 0$ qui justifie l'adjectif "oblique". Lorsque $m = 0$, on retrouve le cas d'une asymptote horizontale.

AO donnée

Exemple

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique au graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.



Car

$$\begin{aligned} f(x)-(x+1) &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^2-(x^2-1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Et par les règles usuelles du calcul des limites,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Comment déterminer les asymptotes obliques?

La proposition suivante permet de calculer m et b lorsqu'ils existent.

Résultat

La droite $y = mx + b$, où $m \neq 0$, est asymptote oblique au graphe de f pour x tendant vers $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b$$

Concrètement: on calcule donc d'abord $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si elle est finie et non nulle, on calcule ensuite $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$. Les valeurs donnent l'équation des asymptotes.

Les fonctions n'ont pas toujours des asymptotes!

Exemple

Le cas de la fonction ln est subtil car

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(en application de la règle de l'Hospital), mais

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty.$$

Dès lors il n'y a en réalité pas d'asymptote horizontale, ni oblique !(Par contre il y a bien une asymptote verticale en $x = 0$.)