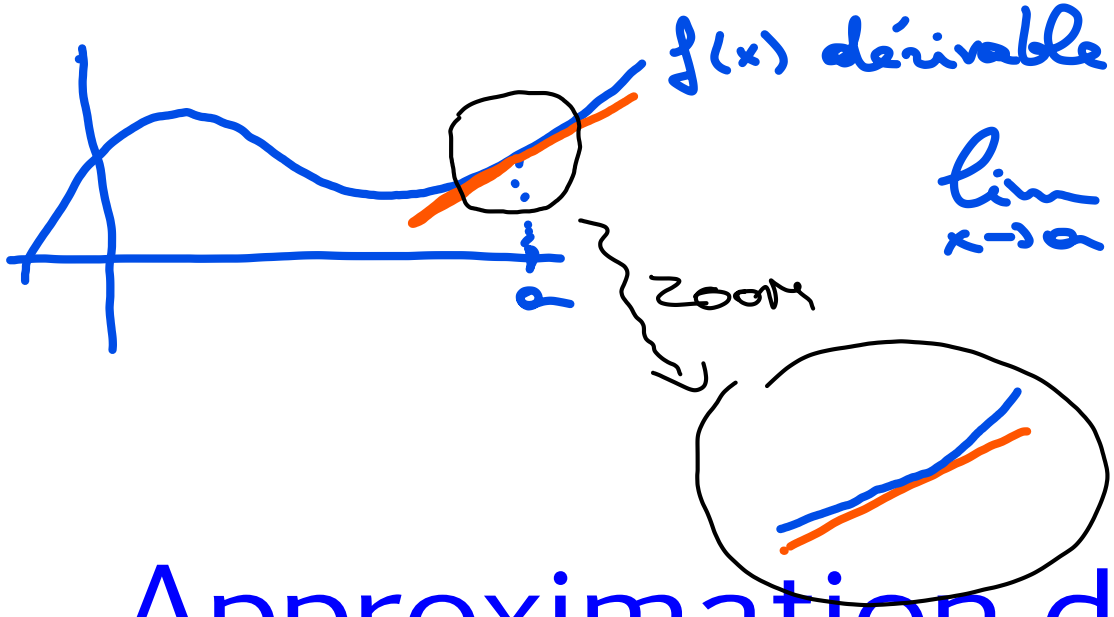


$\lim_{x \to a}$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$

pente de la tgte au graphe

Approximation de Taylor

(Syllabus Chapitre XI, partie 5)

Contenu de la section

Approximation de Taylor

Motivation

On a vu comment les dérivées permettent de prédire les variations d'une fonction et sa convexité. Ce sont des informations globales.

Souvent on a besoin de calculer précisément les valeurs d'une fonction en un point donné, et on aurait juste besoin de connaître ces valeurs de manière approchée: on voudrait juste des informations locales.

Nous allons voir une manière canonique d'approcher une fonction au voisinage d'un point donné via ses dérivées en ce point: ce qu'on va appeler les Approximations de Taylor (aussi appelées: développements limités).

Contenu de la section

Approximation de Taylor
- Ordre 1
- Ordre 2
- Polynômes de Taylor d'ordre supérieur

Rappel

Définition

$f : [c, d] \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in]c, d[$ si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En d'autres termes, s'il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

Ce qu'on peut encore écrire, en mettant au même dénominateur:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x - a) \right]}{x - a} = 0.$$

On note alors:

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dire que f est dérivable en a revient donc à dire que

$$f(x) - T_1(x) = o(x - a) \text{ pour } x \to a.$$

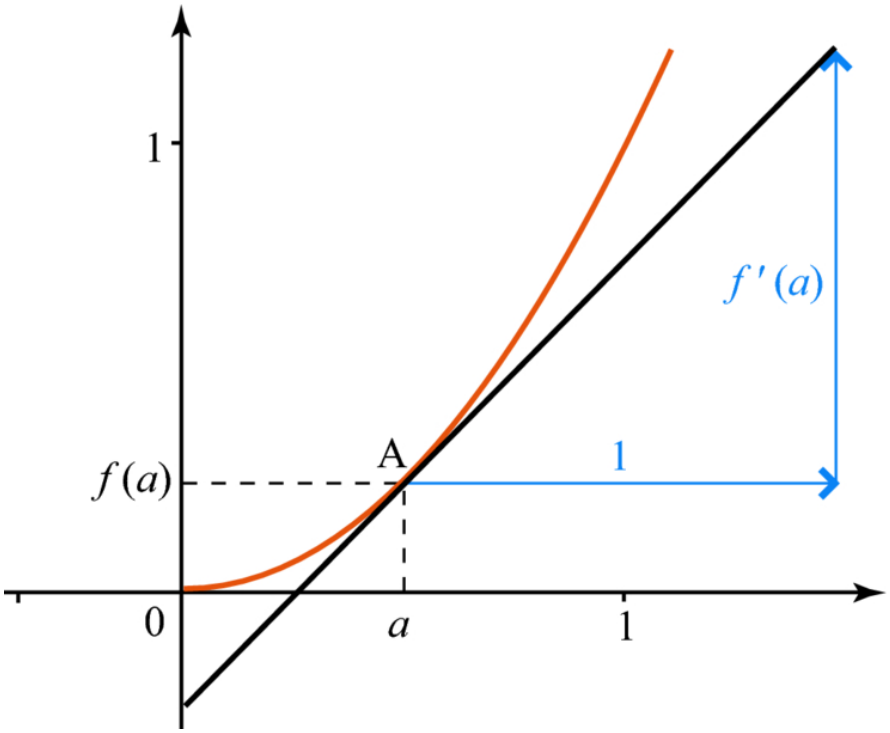
Que représente $T_1(x)$?

Remarque

Si f est dérivable au point a, la droite d'équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a) = T_1(x)}$$

est la *droite tangente au graphe de f au point* $(a, f(a))$ ou *droite tangente de f en a*.



$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est donc une fonction polynômiale de degré 1 dont le graphe est simplement la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Polynôme de Taylor d'ordre 1

Le polynôme $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est une bonne approximation de f près de $x = a$:
si on note $R(x) = f(x) - T_1(x)$, on a vu que $R(x)$ tend vers 0 plus vite que $(x-a)$ pour $x \to a$, c'est-à-dire:

$$R(x) = o(x-a) \text{ lorsque } x \to a.$$

Définition

T_1 défini par $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est le *polynôme de Taylor d'ordre* 1 de la fonction f au point a.

T_1 est alors le polynôme d'ordre 1 qui approche le mieux f près de a.

Définition: [petit o] f, g 2 fcts. On dit que f est un "petit o" de g en a et on note $f = o(g)$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Questions de notations

Quand on écrit $f(x) = T_1(x) + o(x-a)$ on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

lorsque $x \to a$

ou de manière équivalente:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

où le $o(h)$ est pris lorsque $h \to 0$ dans le deuxième cas.

On a en fait juste posé $h = x - a$.

Les physiciens écrivent parfois aussi:

$$f(a+\delta a) = f(a) + f'(a)\delta a + o(\delta a)$$

pour indiquer que δa est "une petite variation autour de a".

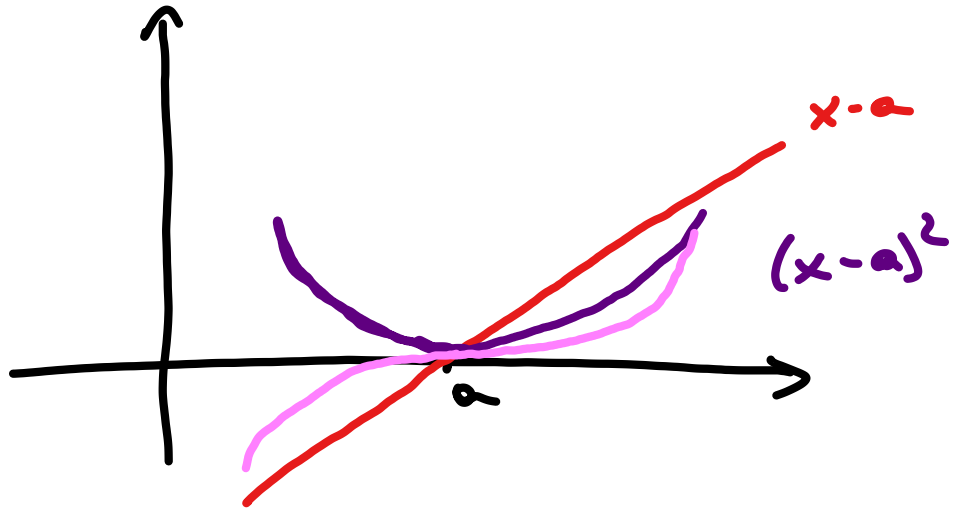
Récapitulons

Remarque

- Idée générale : si f est une fonction quelconque on veut l'approcher, le mieux possible, par des fonctions plus simples: polynômes.
- Si on essaye d'approcher par des polynômes de degré plus élevé, a-t-on une meilleure approximation ? Oui! (on va le voir dans un instant)
- Il n'est pas forcément possible de bien approcher f *partout*, donc on se contentera ici de l'approcher près d'un point a fixé dans le domaine.
- On pourrait aussi approcher f par autre chose que des polynômes, mais on ne le verra pas ici.

Contenu de la section

Approximation de Taylor
- Ordre 1
- Ordre 2
- Polynômes de Taylor d'ordre supérieur



T_1 : erreur contrôlée par $x-a$

Meilleur contrôle avec $(x-a)^2$

Encore meilleur $(x-a)^3$

But: de meilleures approximations

Nous cherchons maintenant une approximation au second ordre: c'est-à-dire que nous cherchons une fonction T_2 telle que

$$f(x) - T_2(x) \text{ tend vers 0 plus vite que } (x-a)^2 \text{ lorsque } x \to a.$$

Ce qui veut dire précisément:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-a)^2} = 0 \text{ lorsque } x \to a.$$

$$\updownarrow$$

$$f(x) - T_2(x) = o\left((x-a)^2\right)$$

But: de meilleures approximations

Pourquoi ce $(x-a)^2$ est une meilleure approximation? Parce que $(x-a)^2$ est bien plus petit que $(x-a)$ près de a: c'est ce qu'on avait écrit sous la forme:

$$(x-a)^2 = o(x-a) \text{ lorsque } x \to a.$$

(Ce qui est vrai car $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2}{x-a} = \lim_{x\to a}(x-a) = 0$.)

On choisira pour T_2 un polynôme de degré 2 particulier, le polynôme de taylor d'ordre 2 de f en a.

Polynôme de Taylor d'ordre 2

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en a est donné par:

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

On rappelle que $2! = 2$.

T_2 est l'unique polynôme de degré (au plus) 2 dont les dérivées première et secondes en a coïncident avec celles de f. En effet:

$$T_2'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) \quad \text{donc } T_2'(a) = f'(a)$$

Et ensuite:

$$T_2''(x) = f''(a) \quad \text{donc } T_2''(a) = f''(a).$$

Un exemple

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
On va déterminer son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$ et en $a = 1$.
On commence par calculer:

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$$

Donc

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = 2.$$

Le polynôme de Taylor de f à l'ordre 2 en 0 est donc

$$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = x^2.$$

Celui en 1 est alors:

$$T_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}$$
$$= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = 1 + 2x - 2 + x^2 - 2x + 1$$
$$= x^2$$

Questions de précision

Le fait d'approcher f par T_2 au voisinage de a se base sur les idées suivantes:

- Un polynôme est beaucoup plus simple à calculer qu'une fonction quelconque
- Le polynôme T_2 est proche de f à l'ordre 2 au voisinage de a: ceci signifie que $f - T_2$,$(f - T_2)'$ et $(f - T_2)''$ tendent vers 0 lorsque $x \to a$. Et donc que

$$f(x) - T_2(x) = o\Big((x-a)^2\Big).$$

- Est-ce qu'on pourrait obtenir de cette manière n'importe quelle précision? Oui!

Contenu de la section

Approximation de Taylor
- Ordre 1
- Ordre 2
- Polynômes de Taylor d'ordre supérieur

Un rappel: dérivées des fonctions puissance

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $a \in \mathbb{R}$.

- On sait que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-a)^n$ et dérivable et que
$$f'(x) = n(x-a)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- La fonction f' est encore elle-même dérivable, et de la même manière on a
$$f''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
si $n \geq 2$ (si $n = 1$, $f''(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

- On peut continuer ce calcul par récurrence. Si k est un entier : $1 \leq k \leq n$, on aura:
$$f^{\underline{k}}(x) = n(n-1)\cdots(n-(k-1))(x-a)^{n-k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $f^{\underline{n}}(x) = n! \ \forall x \in \mathbb{R}$, et donc

la dérivée d'ordre n de $\dfrac{(x-a)^n}{n!}$ est la fonction constante égale à 1.

Polynôme de Taylor d'ordre n

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a est donné par:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{\underline{k}}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{\underline{n}}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

où $f^{\underline{k}}(a)$ désigne la dérivée k-ème de f au point a $(1 \leq k \leq n)$.

Les dérivées de T_n et f coïncident à l'ordre n.

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

T_n est à chaque fois obtenu en rajoutant un terme à T_{n-1}.
Et les dérivées de f et de T_n en a .

- En effet, $T_n(a) = f(a)$.
- Ensuite,

  $$T_n'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

  donc $T_n'(a) = f'(a)$.
- En continuant à dériver on trouve de même

  $$T_n''(x) = f''(a) + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}$$

  et donc $T_n''(a) = f''(a)$.
- Et ainsi de suite jusqu'à $T_n^n(a) = f^n(a)$.

La fonction $T_n - f$ est donc "très plate" au voisinage de a. C'est d'ailleurs la motivation pour choisir T_n de cette forme.

Théorème de Taylor

Le théorème suivant exprime que le polynôme de Taylor est la meilleure approximation polynomiale de f près de a :

Théorème

Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en a, où n est un entier $n \geq 1$. Le polynôme de Taylor T_n est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant:

$$f(x) - T_n(x) = o\Big((x-a)^n\Big) \quad \text{lorsque } x \to a.$$

Nous omettons la preuve de ce théorème.

Un exemple: la fonction sin

aussi appelé approximation de Mac Laurin qd $a=0$.

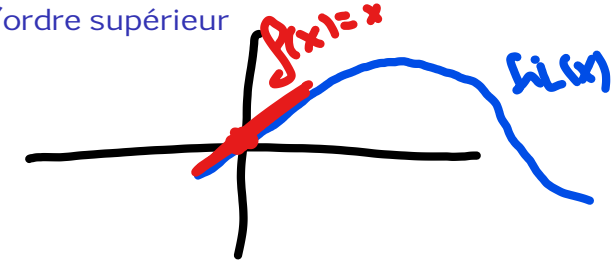
Ecrivons le polynôme de Taylor de $f(x) = \sin x$ d'ordre 5 autour de $a = 0$. On commence par calculer ses dérivées:

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f^3(x) = -\cos x$$

$$f^4(x) = \sin x \quad \text{et } f^5(x) = \cos x.$$

Dès lors :

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f^3(0) = -1 \quad f^4(0) = 0 \quad f^5(0) = 1.$$



Un exemple: la fonction sin

Et donc nous avons :

$f(0)+f'(0)(x-0)$

$$T_0(x) = 0$$

$$T_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$$

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} = x$$

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_4(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} = x - \frac{x^3}{6}$$

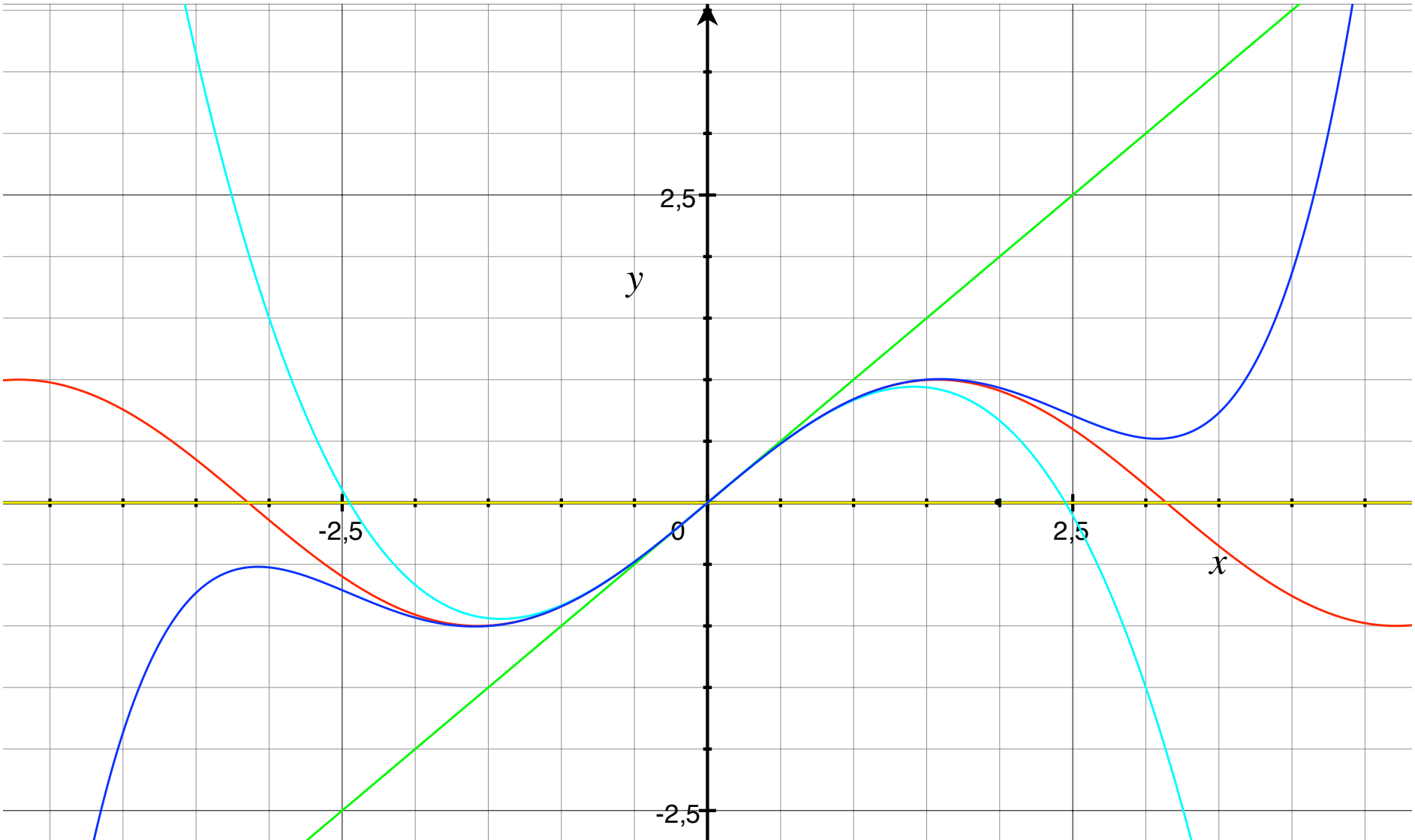
$$T_5(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

$T_6(x) = T_5(x)$

$T_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}$

Une illustration

La fonction sin est en rouge, T_0 en jaune, T_1 et T_2 en vert, T_3 et T_4 en bleu clair et T_5 en bleu foncé.



Encore un exemple: la fonction ln à l'ordre 3

Prenons maintenant $f(x) = \ln x$ et $a = 1$.

$$f'(x) = x^{-1} \qquad f''(x) = -x^{-2} \qquad f'''(x) = 2x^{-3}$$

évaluons maintenant les dérivées de f en $a = 1$:

$$f(1) = 0 \qquad f'(1) = 1 \qquad f''(1) = -1 \qquad f'''(1) = 2$$

Les polynômes de Taylor de $f(x) = \ln x$ en $a = 1$ sont donc :

$$T_1(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) = x - 1,$$

$f(1) + f'(1)(x-1)$

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - 1\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - 1\frac{(x-1)^2}{2} + 2\frac{(x-1)^3}{6}$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

$\ln(1,1) = ?$

??

$1,1-1$

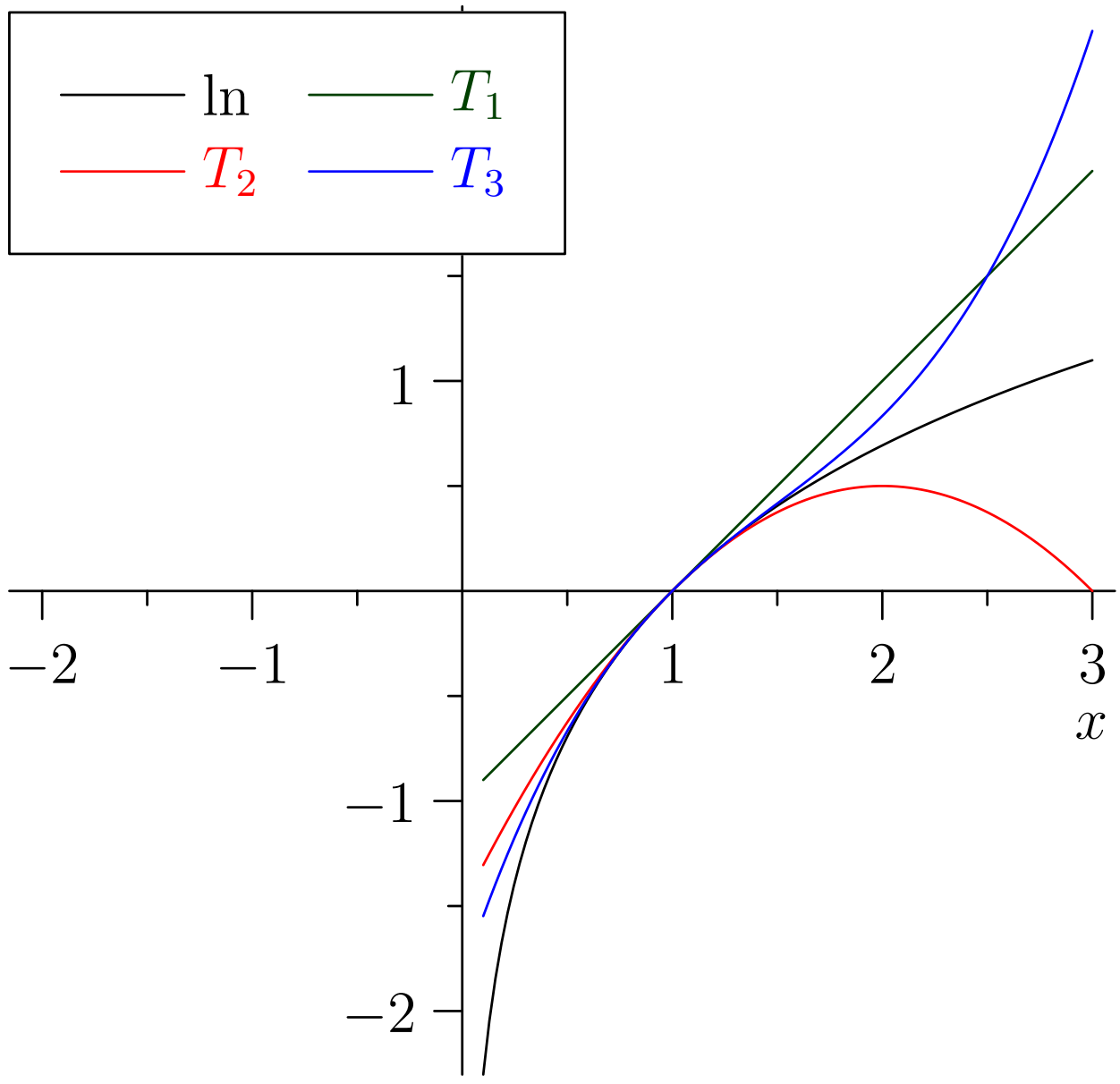
$-\frac{1}{2}(1,1-1)^2$

$+\frac{1}{3}(1,1-1)^3$

$= 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2$

$+\frac{1}{3}(0,1)^3$

$\ln(1,1) \approx 0,095\ldots$ (exo).


ln
T_1
T_2
T_3
1
−2
−1
1
2
3
x
−1
−2

Polynôme de Taylor d'ordre quelconque pour $\ln(x)$

En calculant les dérivées de $f(x) = \ln(x)$ on devine une formule générale pour $f^{k}(x)$, valable pour $k \geqslant 1$:

$$f^{k}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$$

(On la démontre rigoureusement par récurrence).

On en déduit la formule suivante pour le polynôme de Taylor d'ordre n de ln, valable pour tout entier $n \geq 1$:

$$T_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n.$$

(Essayez de démontrer cette formule!)