# Primitives 1

(Syllabus Chapitre XII, parties 1 à 4 et Chapitre X partie 4)

# Contenu de la section

## Primitives

# Motivation

Il arrive souvent, en pratique, qu'on connaisse la dérivée d'une fonction sans connaître l'expression même de la fonction.

On peut par exemple connaître la vitesse instantanée d'un objet, qui est la dérivée de sa position par rapport au temps, et essayer d'en déduire l'expression de sa position au cours du temps.

Dans ce cours et le prochain nous verrons des manières de retrouver l'expression d'une fonction à partir de sa dérivée: nous parlerons de calcul de primitives et d'intégrales.

# Contenu de la section

Primitives
- Définition
- Notations

# Primitive: définitions

## Définition

Soit $f$ une fonction réelle. Une *primitive* de $f$ est une fonction $F$ dérivable sur le domaine de $f$ et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

## Remarque

Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors pour toute constante $C$, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$.
Car $(F + C)' = F' = f$.

## Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est une primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$. Car $(x^2)' = 2x$. La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ aussi.
- La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Car $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$. $x \mapsto \ln(x) - 3$ aussi

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

⚠ si dom = réunion d'int. voir exemple à Bac.

## Résultat

*Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur un même intervalle ouvert $I$, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$, $\forall x$ dans $I$.*

Les constantes apparaissant de la sorte s'appellent parfois *constante d'intégration*.

## Remarque

Si on connait *une* primitive d'une fonction définie sur un intervalle, alors on les connait *toutes*: Il suffit d'ajouter une constante quelconque.

## Remarque

Si $f$ est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque "morceau" du domaine a sa propre constante d'intégration.



## Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est $\ln(|x|)$. Le domaine n'est pas un intervalle, mais une union de deux intervalles: $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Il y a donc une constante d'intégration par intervalle: les primitives de

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

sont toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ telles que

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

# Contenu de la section

Primitives
Définition
Notations

**Rappel:** $f$ une fct

- $F$ est une primitive de $f$ si $F' = f$
- Si $F$ est une primitive de $f$

$\Rightarrow$ Toute autre primitive est de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

- ex : $(x^3)' = 3x^2$

$\rightarrow x^3 + C$ est une primitive de $3x^2$ quelque soit $C \in \mathbb{R}$

# Notations

Si $f$ est une fonction, on notera $\int f(x)dx$ ses primitives.
C'est-à-dire $\int f(x)dx$ représente toute fonction vérifiant $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

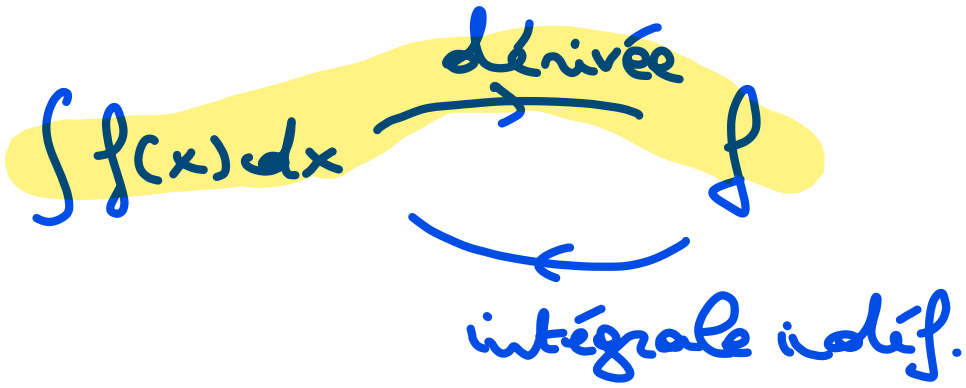
Si $F$ est une primitive de $f$, on dit aussi que $F$ est une *intégrale indéfinie* de $f$.

Dans l'expression $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $f$ est appelée l'intégrande de la primitive.

La variable $x$ n'a pas de rôle particulier: c'est ce qu'on appelle une variable muette. On écrira aussi $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(u)\,\mathrm{d}u$, ...

# Contenu de la section

## Techniques de recherche de primitive



Trouver une primitive d'une fonction est l'opération qui inverse la dérivation. On a le schéma suivant pour une fonction $f$ et sa primitive $F$ :

$$F + C \longrightarrow f \qquad\qquad F + C \longleftarrow f.$$

On verra aujourd'hui et au prochain cours plein de techniques permettant de calculer l'expression des primitives d'une fonction donnée.

# Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive
- À partir des règles de dérivation
  - Intégration immédiate
  - Fonctions trigonométriques réciproques (Syllabus Chapitre X, partie 4)
  - Sinus et cosinus hyperboliques
  - Linéarité

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

## Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

**Toutes** les primitives de $x^2$ sont donc données par:

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Le $+C$ est une façon d'écrire qu'on a toutes les primitives de $x^2$.

# Primitive des fonctions puissance

## Résultat

*Lorsque* $a \neq -1$*,*

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

## Preuve

*Pour montrer cette formule il suffit de se souvenir que la dérivée de* $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ *pour* $a \neq -1$ *vaut* $x^a$*:*

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{a+1}{a+1} x^{a+1-1} = x^a.$$

*Par définition d'une primitive on a donc*

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

# Une mise en garde

## Remarque

La recherche de primitive est une opération bien plus complexe que la dérivation !

Etant donné une "formule" (somme, produit et composées de fonctions dont la dérivée est connue), on peut toujours la dériver et obtenir une nouvelle "formule" via les règles de dérivation.

Mais il n'est pas toujours possible de faire cela avec la primitivisation !

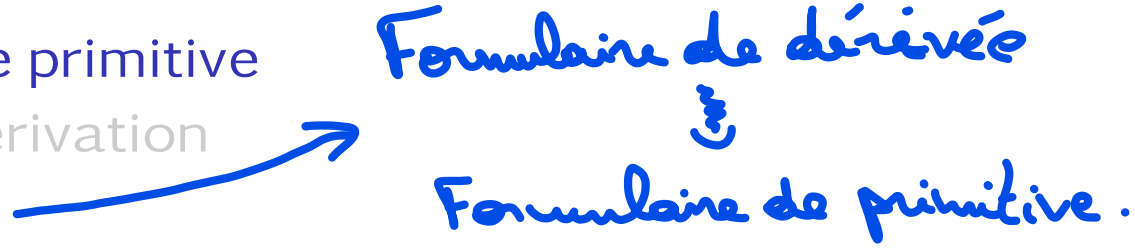
On va voir maintenant des méthodes particulières qui permettent quand même de calculer des intégrales.

$\int e^{-x^2}\,dx = ?$

$e^{-x^2}$ admet une primitive mais elle ne peut pas s'écrire comme combi des fct de référence. ⟹ ça définit une nouvelle fct.

# Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive
- À partir des règles de dérivation
- Intégration immédiate
- Fonctions trigonométriques réciproques (Syllabus Chapitre X, partie 4)
- Sinus et cosinus hyperboliques
- Linéarité



En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$[\cos(-\cos(x))' = \sin(x)]$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dans tous ces exemples, on a écrit une seule constante d'intégration $C$. Mais gardez en tête que s'il y a plusieurs morceaux dans le domaine il faut plusieurs constantes d'intégration.

Ces formules sont à connaître par coeur, car elles sont constamment utilisées pour calculer des primitives!

# Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive
- À partir des règles de dérivation
- Intégration immédiate
- Fonctions trigonométriques réciproques (Syllabus Chapitre X, partie 4)
- Sinus et cosinus hyperboliques
- Linéarité

# Dérivées de arcsin et arccos

Nous allons voir d'autres exemples d'intégration immédiate. Pour ça nous allons calculer les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques.

On rappelle que les fonctions $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ et $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ sont des bijections. Leurs fonctions réciproques sont notées

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On rappelle que sin et cos ne sont pas inversibles sur $\mathbb{R}$ en entier, mais juste sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[0, \pi]$ respectivement.

# Rappel: graphe de arcsinus

Graphe (en rouge) de la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

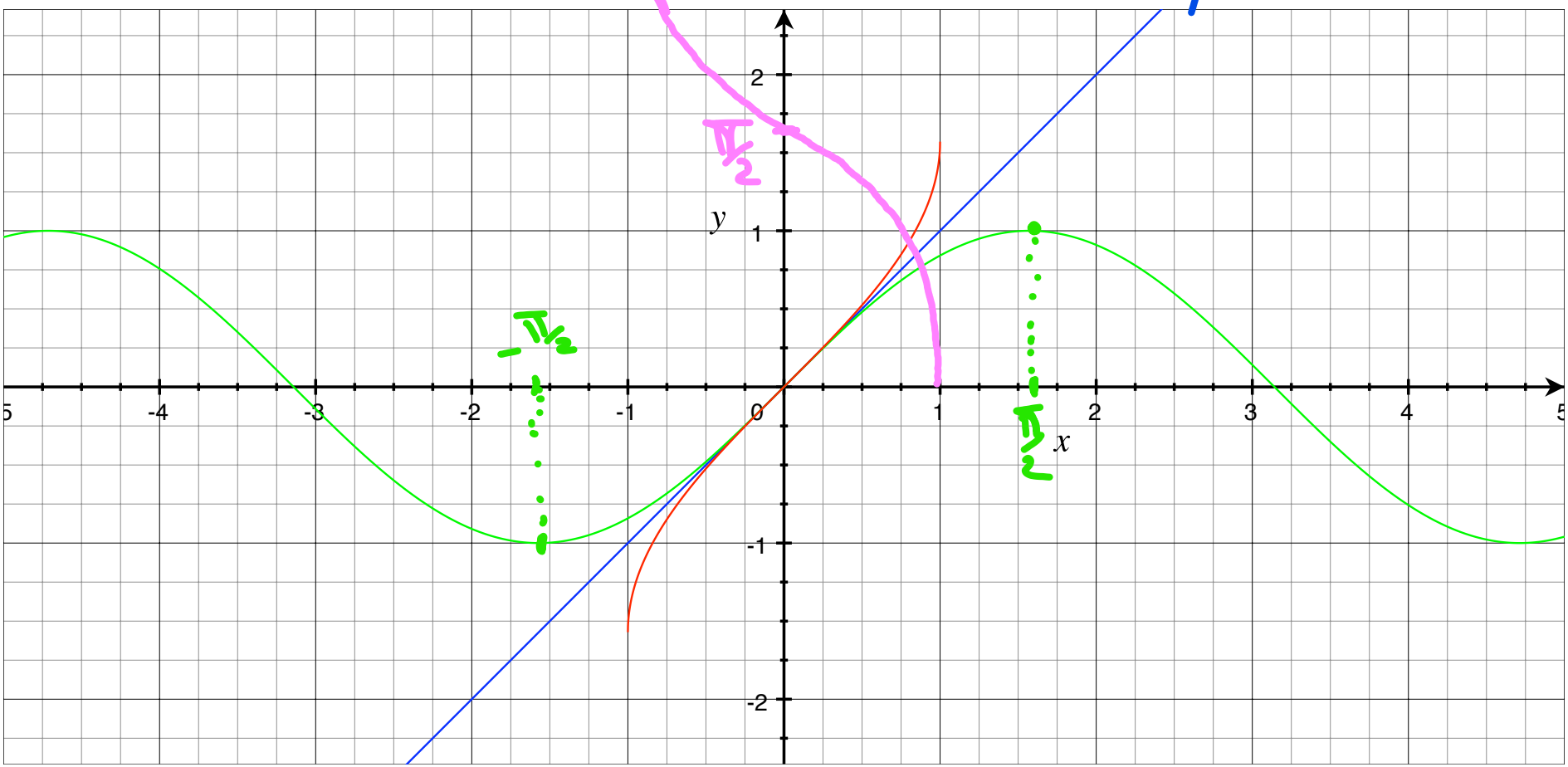



Figure: Graphes de sin (en vert) et arcsin (en rouge)

# Dérivées de arcsin et arccos

sur le graphique, on "voit" la relation $\arccos(x) = -\arcsin(x) + C$ avec la bonne constante $C \in \mathbb{R}$.

## Résultat

$\forall x \in ]-1,1[$ *on a:*

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ceci rajoute les deux formules suivantes d'intégration immédiate, qui sont à connaître:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad x \in ]-1,1[$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C \qquad x \in ]-1,1[$$

# Preuve de la proposition précédente

$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

## Preuve

*On calcule la dérivée de* $\arcsin = \sin^{-1}$ *en* $x$ *avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a,* $\forall x \in ]-1,1[$*:*

$$(\arcsin x)' = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

*On va donc maintenant calculer* $\cos(\arcsin x)$*. En utilisant la relation*

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R} \iff \cos^2 = \pm\sqrt{1-\sin^2}$$

*, et en l'appliquant en* $y = \arcsin x$*, on trouve:*

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$$

***Attention:*** *il y a bien un signe "+" car* $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, et donc* $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$*. En fin de comptes on trouve donc:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le même raisonnement donne le résultat pour arccos. □

↳ (exo)

# Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive
- À partir des règles de dérivation
- Intégration immédiate
- Fonctions trigonométriques réciproques (Syllabus Chapitre X, partie 4)
- Sinus et cosinus hyperboliques
- Linéarité

# Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui seront utiles dans nos recherches de primitives en donnant encore d'autres exemples d'intégration immédiate:

- Le cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, \infty[ : x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\, x \quad (\mathrm{ch} \text{ est paire})$$

$$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\, x \quad (\mathrm{sh} \text{ est impaire})$$

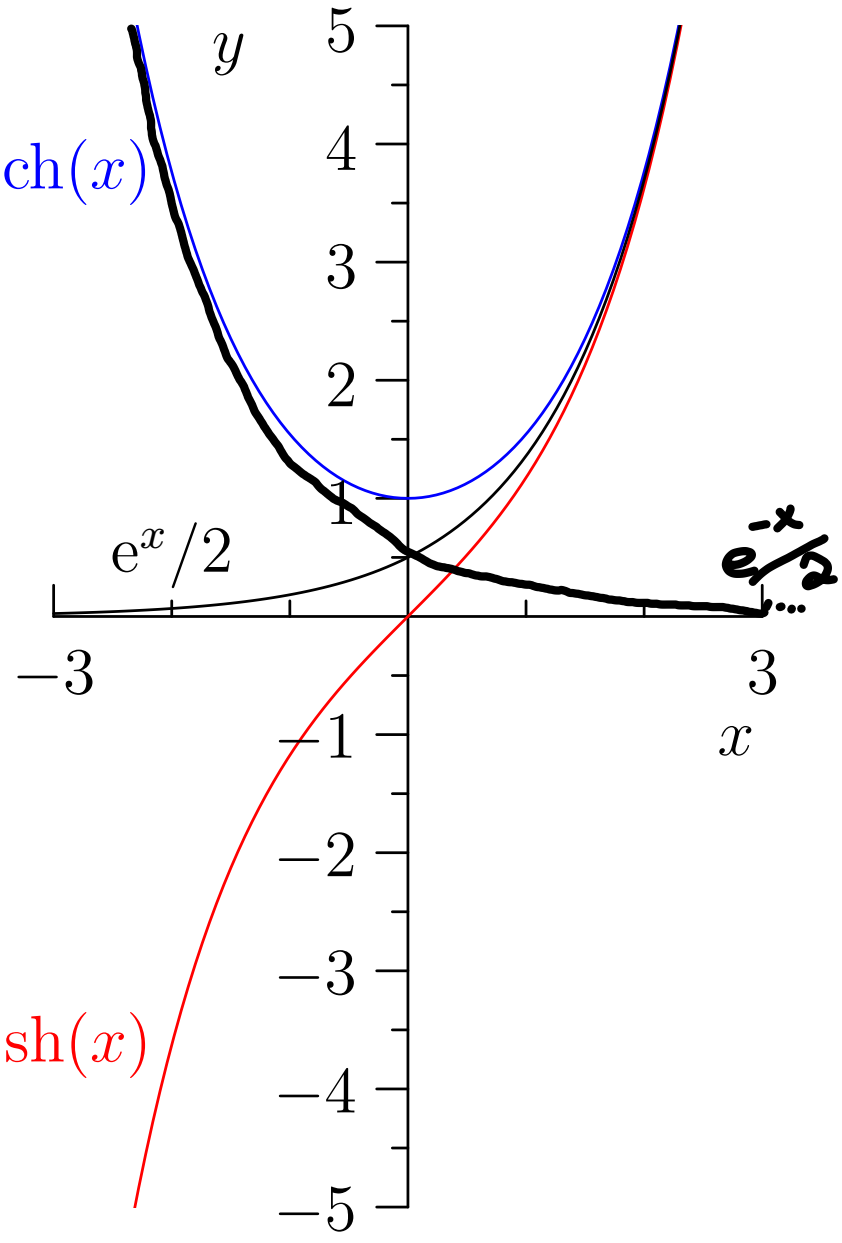
$$(\mathrm{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' + (e^{-x})'\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x.$$

Leurs propriétés ressemblent à celles des fonctions sin et cos (d' où leur nom). Attention, les formules sont légèrement différentes de celles de la trigonométrie classique !

Les graphes de ces fonctions :

$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$




$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

# Propriétés de ch et sh



$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

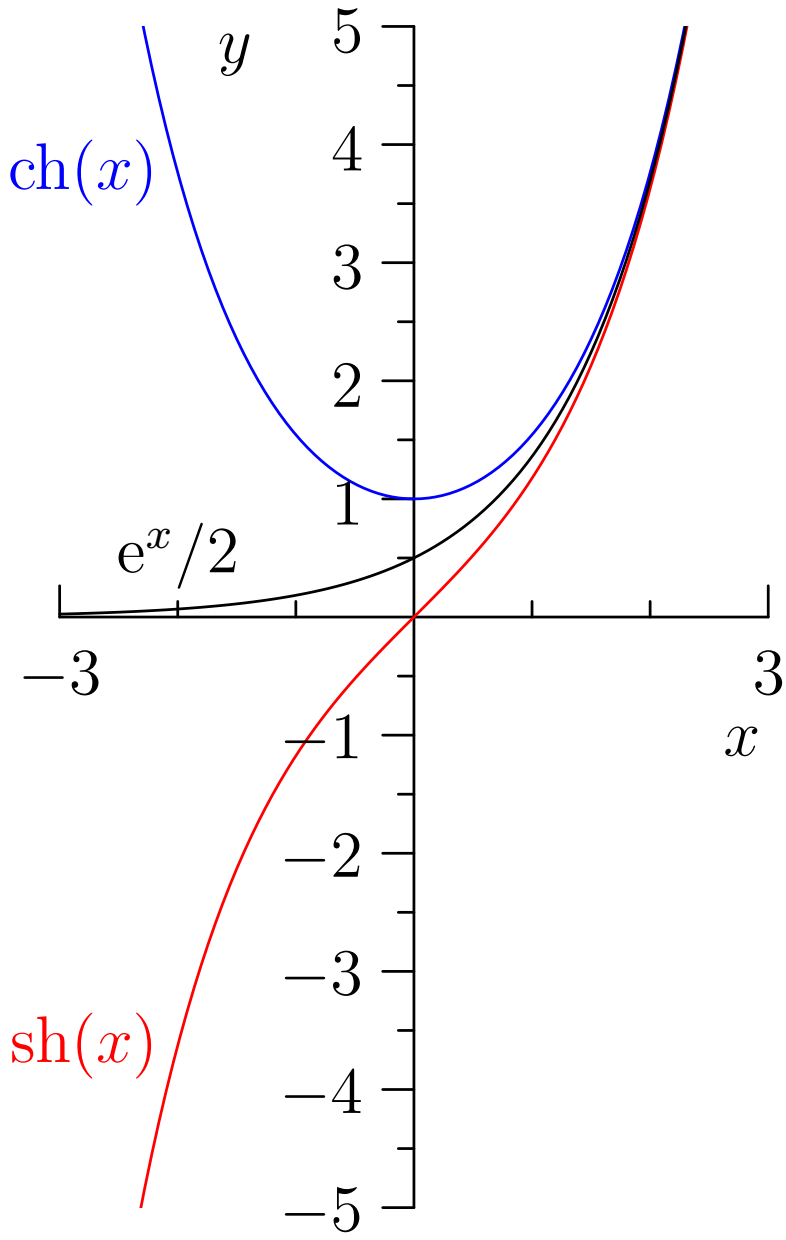
Nous admettrons les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et s'annule en 0), et
3. ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et
4. ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Dont vous pouvez déduire les propriétés suivantes:

- sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et
- ch (restreinte à $\mathbb{R}^+$) une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ch (restreinte à $\mathbb{R}^+$) est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ :



Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

arccosh ou

$$\mathrm{ch}^{-1} := \mathrm{argch} : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \mathrm{argch}\, x$$

$$\mathrm{sh}^{-1} := \mathrm{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{argsh}\, x.$$

ou arcsinh

## Résultat

*Les dérivées des fonction* argch *et* argsh *sont données par les formules suivantes:*

- *pour tout* $x \in ]1, +\infty[$,
$$(\mathrm{argch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
- *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$(\mathrm{argsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Nous admettons cette proposition. La preuve est semblable au calcul de la dérivée de arcsin.

↳ travailler la démon en // avec la dém de $(\arcsin(x))'$.

De tout ce qui précède nous obtenons de nouvelles formules d'intégration immédiate:

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \operatorname{argch}(x) + C \qquad x \in ]1, \infty[$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \operatorname{argsh}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

Ces formules aussi sont à connaître par coeur.

↳ ainsi que les formules de dérivation correspondantes.

# Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive
- À partir des règles de dérivation
- Intégration immédiate
- Fonctions trigonométriques réciproques (Syllabus Chapitre X, partie 4)
- Sinus et cosinus hyperboliques
- Linéarité

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions $f$ et $g$.

La règle de dérivation d'une fonction multipliée par une constante $c$, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, donne lieu à :

$$\int cf = c \int f$$

pour toute fonction $f$ et tout réel $c$.

On peut résumer les deux règles précédentes sous la forme :

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

pour des fonctions $f, g$ et des réels $a, b$.

C'est une propriété dite de linéarité.

$\int 1 + 2x - 3x^2 + 5x^3 \, dx = ?$ combili des fct $1, x, x^2$ et $x^3$

## Exemple

Considérons la fonction polynomiale $P$ définie par

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n ,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Par intégration immédiate,

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$$

$$\vdots$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

D'où, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int P(x) \, \mathrm{d}x &= \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) \, \mathrm{d}x \\ &= a_0 \int \mathrm{d}x + a_1 \int x \, \mathrm{d}x + a_2 \int x^2 \, \mathrm{d}x + \cdots + a_n \int x^n \, \mathrm{d}x \\ &= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$