Primitives 2

(Syllabus Chapitre XII, parties 5 à 7)

Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive (suite)

Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive (suite)
Intégration par changement de variable
Intégration par parties
Décomposition en fractions simples
Application au calcul d'intégrales

Changement de variables I

Nous allons voir dans cette section une méthode très pratique pour calculer des primitives:

la méthode de changement de variable.
par substitution.

Elle se base sur une réécriture de la règle de dérivation des fonctions composées.

Rappel: si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est donnée par $g \circ f(x) = g(f(x))$ et sa dérivée vaut:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))).$$

Par intégration immédiate, ceci nous fournit la règle de primitivisation par changement de variable:

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C.$$

Changement de variables II

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C.$$

Il n'est en général pas facile de voir que l'intégrand s'écrit sous la forme $g'(f(x))f'(x)$:(On s'en sort d'une autre manière :)

On commence par poser $h = g'$, de sorte que $g + C = \int h(u)\,\mathrm{d}u$ (c'est une égalité entre fonctions). En appliquant cette égalité en $f(x)$ on trouve alors:

$$g(f(x)) + C = \int_{u=f(x)} h(u)\,\mathrm{d}u,$$

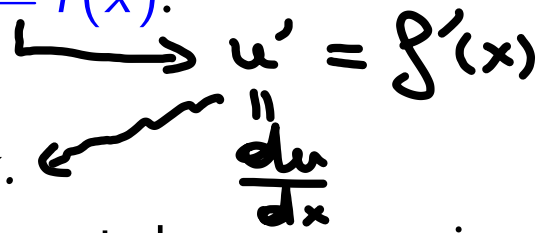
où $\int_{u=f(x)} h(u)\,\mathrm{d}u$ indique qu'après avoir calculé la primitive de h (qui vaut g), on l'applique en $f(x)$. On reformule alors ça comme:

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=f(x)} h(u)\,\mathrm{d}u.$$

En pratique

- On choisit dans l'intégrand une expression $f(x)$ qu'on veut remplacer par une nouvelle variable $u = f(x)$.
- En dérivant formellement on écrit:

$$\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$



Cette égalité $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ n'a pas vraiment de sens, mais c'est un moyen mnémotechnique efficace pour ne pas se tromper avec les nouvelles variables dans un changement de variable.

- On remplace toutes les occurrences de x dans l'intégrand initiale par la nouvelle variable u. Et on calcule une primitive de la fonction définie dans cette nouvelle variable u.
- Enfin, on remplace u par $f(x)$ dans l'expression de la primitive trouvée. Et on obtient une primitive de la fonction initiale.

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On remarque que $3x^2$ est la dérivée de x^3+5. On pose alors $u = x^3+5$. Et on calcule: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9}\cdot\underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int_{u=x^3+5} u^9\,\mathrm{d}u$$

on ne le note pas, mais

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

on ne l'oublie pas.

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer u par x^3+5 pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int_{u=x^3+5} u^9\,\mathrm{d}u = \frac{(x^3+5)^{10}}{10} + C.$$

On vérifiera toujours le calcul en dérivant le membre de droite!

Exemple

On va calculer

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx$$

en posant $u = \sin x$. Alors $du = \cos x \, dx$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \int_{u=\sin x} u^4 \, du = \left[\frac{u^5}{5} + C\right]_{u=\sin(x)} = \frac{\sin^5(x)}{5} + C.$$

On a utilisé encore qu'une primitive de u^4 est donnée par $\frac{u^5}{5}$. Ce qui donne la résultat en remplaçant u par $\sin(x)$. On a ici pensé à poser $u = f(x) = \sin x$ car l'intégrale contient déjà $\cos x$, qui n'est autre que $f'(x)$.

Pour vérifier que c'est bon, comme toujours: on dérive le résultat obtenu et on vérifie que ça donne bien $\sin^4 x \cos x$.

Mises en garde

Dans la méthode du changement de variables on pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! Une fois qu'on a posé $u = f(x)$ on remplace tous les x par des u.

Mises en garde

Dans la méthode du changement de variables on pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! Une fois qu'on a posé $u = f(x)$ on remplace tous les x par des u.
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début: il *doit* donc être remplacé par *une* occurrence de $\mathrm{d}u$. (En général on se débrouille pour faire apparaître $f'(x)\,\mathrm{d}x$ au début et le remplacer directement par $\mathrm{d}u$)
- Il ne peut pas y avoir de $\mathrm{d}u$ au carré, de $\frac{1}{\mathrm{d}u}$ ni de "$\mathrm{d}u$ ajouté à autre chose".

Contenu de la section

Calcul de primitive :

. Formulaire pr dérivée ⇒ formulaire pour primitive.

. Dérivée de fct comp ⇒ formation par changt de variable.

Techniques de recherche de primitive (suite)
Intégration par changement de variable
Intégration par parties
Décomposition en fractions simples
Application au calcul d'intégrales

⟸ Dérivée d'un prod de fct.

Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{donc} \quad \int f'(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

En prenant des primitives, on trouve :

Formule d'intégration par parties (IPP)

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

2 choix possibles (au moins).

En pratique: quand on aura une primitive à calculer, on essayera d'identifier f' et g et on applique directement cette formule!

Cette formule remplace une fct indéfinie par une autre qu'on espère plus facile à calculer.

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, dx$. On pose alors:

$$g(x) = x, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Pourquoi ce choix de f et g? On aurait très bien pu poser $f'(x) = x$ et $g(x) = \cos x$. On aurait alors obtenu

$$\int x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx$$

mais il reste alors dans le membre de droite une primitive plus difficile à calculer que celle de départ!

Faire une IPP en pratique

Cet exemple montre que

- le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial dans une intégration par parties, et
- si un premier essai s'est soldé par un échec, on a tout intérêt à faire un second essai en inversant les rôles de $f'(x)$ et $g(x)$.

Un autre exemple

Exemple

On va calculer

$$\int \ln x \, dx$$

IPP? produit ∫' fois ?

Pour ceci on remarque que

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Ceci donne l'idée de prendre

$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$

Alors une IPP donne

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

pour $x \in]0, \infty[$.

Sur le choix de la méthode pour calculer une primitive

Remarque

- Il n'y a pas de "bonne manière" de résoudre un calcul de primitive: l'important est d'obtenir une expression dont la dérivée correspond à l'expression dont on part.
- Il faut souvent essayer plusieurs méthodes: intégration immédiate d'abord, puis changement de variables, et ensuite seulement intégration par parties, ... par forcément dans cet ordre.
- Pensez à toujours bien vérifier le calcul en dérivant le résultat obtenu pour vérifier qu'on récupère bien ce qu'il faut!

Mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois "paraître" très différentes.

On a par exemple montré au cours précédent que, $\forall x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, $-\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Elles diffèrent donc d'une constante, mais ce n'est pas facile à voir!

Le voir graphique plus haut.

On a vu plusieurs méthodes différentes pour calculer des primitives.
Selon la méthode utilisée la primitive trouvée aura une expression différente.
En cas de doute, il faut toujours dériver l'expression obtenue pour s'assurer qu'on a bien trouvé une primitive de la fonction cherchée.

Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive (suite)
- Intégration par changement de variable
- Intégration par parties
- Décomposition en fractions simples
- Application au calcul d'intégrales

Fonctions rationnelles

Obj : $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \rightsquigarrow$ fct de fct rationnelle + simple
↳ fonction immédiate.

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

ex : $\frac{1}{x}$ avec $P(x)=1$, $Q(x)=x$

Un résultat surprenant est que les primitives d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

combinaisons de

sont *toujours* des fonctions élémentaires : ce qui signifie qu'on peut en écrire une formule explicite en fonction des fonctions classiques: fonctions puissance, $\exp(x)$, cos, sin, cosh, sinh ...

Ceci se démontre grâce à une technique appelée la *décomposition en fractions simples* qu'on va expliquer maintenant. On ne décrira cette méthode que lorsque P est de degré 0 ou 1 et Q est de degré 2.

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple (de degré 2)* est de la forme :

$$\frac{a}{x-c}, \quad \frac{a}{(x-c)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{(x-c)^2+d^2}$$

pour certaines constantes réelles a, b, c, d, avec $d \neq 0$.

Résultat

On considère une fraction rationnelle (quotient de polynômes)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{px+q}{rx^2+sx+t}$$

pour certains constantes p, q, r, s, t avec $r \neq 0$. Alors $\frac{P}{Q}$ peut toujours s'écrire comme la somme d'un certain nombre de fractions simples.

Les fractions simples qui interviennent dépendent du nombre de racines de Q comme on va voir dans les exemples qui suivent.

Premier cas: Q a une racine double ($\Delta = 0$)

Lorsque le discriminant de Q est nul, on peut écrire $\frac{P}{Q}$ comme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{(x-c)^2}$$

où c est la racine double de Q.

Exemple

Ecrivons une décomposition en fractions simples de $\frac{3x}{x^2-2x+1}$.
On commence toujours par factoriser le dénominateur: ici on a $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ et Q a donc 1 pour racine double.
Alors

$$\frac{3x}{x^2-2x+1} = \frac{3x}{(x-1)^2} = \frac{3x-3+3}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{3(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

3(x-1)

à simplifier.

OK

Deuxième cas: Q a deux racines distinctes ($\Delta > 0$)

Lorsque le discriminant de Q est strictement positif, on peut écrire $\frac{P}{Q}$ comme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x-c_1} + \frac{b}{x-c_2}$$

où c_1 et c_2 sont les deux racines distinctes de Q.

Exemple

On cherche une décomposition en fractions simples de $\frac{1}{x^2-1}$. Comme

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

a deux racines distinctes (1 et -1), on sait qu'il existe deux nombres réels a et b (qu'on va déterminer!) tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Deuxième cas: Q a deux racines distinctes ($\Delta > 0$). Suite

Exemple

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Pour calculer a et b on réduit le membre de droite au même dénominateur:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a-b)+(a+b)x}{(x-1)(x+1)}$$

Ceci montre donc que a et b vérifient $a-b+(a+b)x = 1 \ \forall x$, et donc

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0. \end{cases}$$

D′ où on tire $a = -b = \frac{1}{2}$, et donc

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

Troisième cas: Q n′ a pas de racines rélles ($\Delta < 0$)

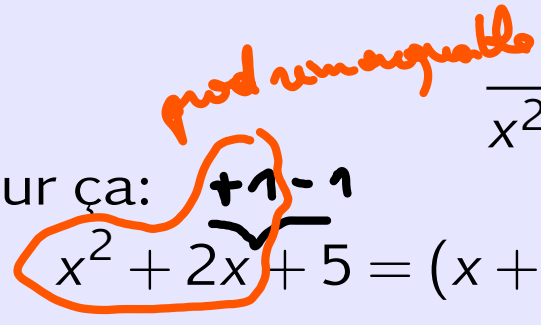
Dans ce cas, $\frac{P}{Q}$ peut toujours s′écrire comme

$$\frac{P}{Q} = \frac{ax+b}{(x-c)^2+d^2}.$$

Exemple

On cherche à obtenir une décomposition de

$$\frac{2x}{x^2+2x+5}.$$



On écrit pour ça:

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2-1+5 = (x+1)^2+4,$$

ce qui donne alors

$$\frac{2x}{x^2+2x+5} = \frac{2x}{(x+1)^2+(2)^2}.$$

Contenu de la section

Techniques de recherche de primitive (suite)
- Intégration par changement de variable
- Intégration par parties
- Décomposition en fractions simples
- Application au calcul d'intégrales

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on utilise la décomposition en fractions simples:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C \\
&= \ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} + C
\end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$.