Intégrales définies

(Syllabus Chapitre XIII)

(Intégrale indéfinies = recherche de primitive)

Contenu de la section

Intégrales définies

Rappel

Rappel

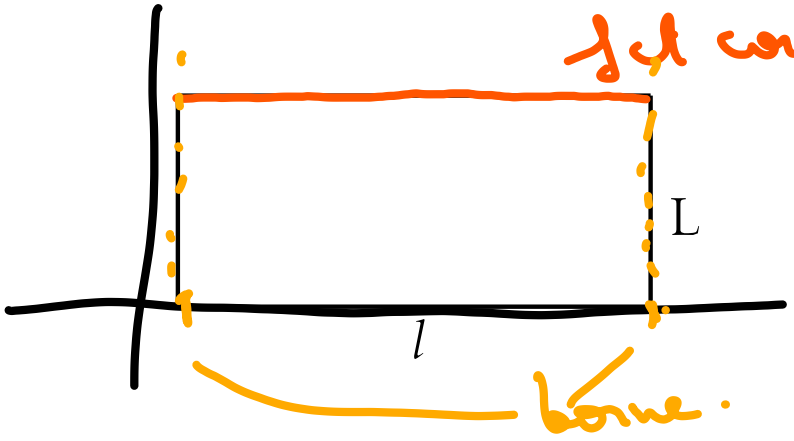
La primitive (ou "intégrale indéfinie") d'une fonction est elle-même une fonction, définie sur le même intervalle que f, et connue à une constante additive près.

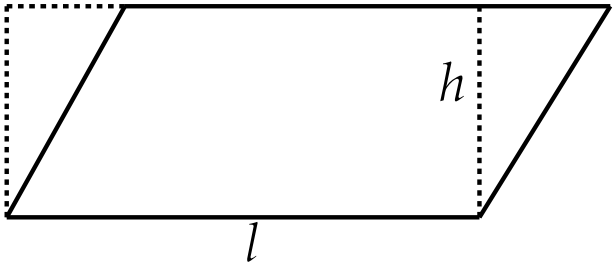
Aujourd'hui nous allons définir l'intégrale définie d'une fonction entre deux bornes. Ce sera un nombre qui représente l'aire d'une région délimitée par le graphe d'une fonction, et les bornes.

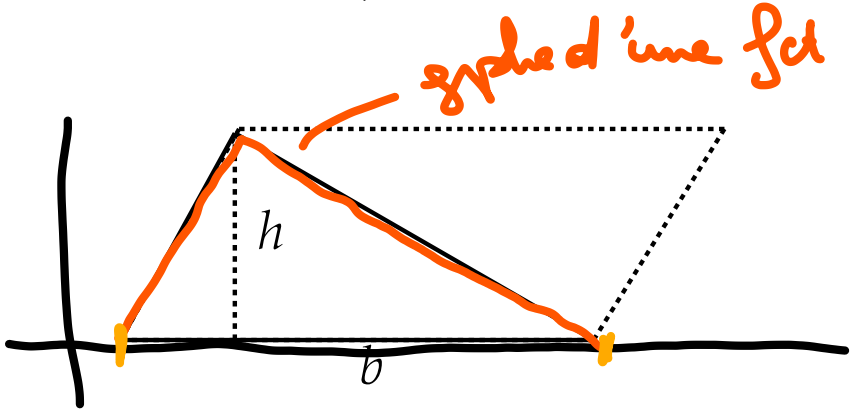
Contenu de la section

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

Aires de figures connues, formées de segments de droites







$$\text{aire} = \text{L} \times l$$

$$\text{aire} = l \times h$$

$$\text{aire} = \frac{b \times h}{2}$$

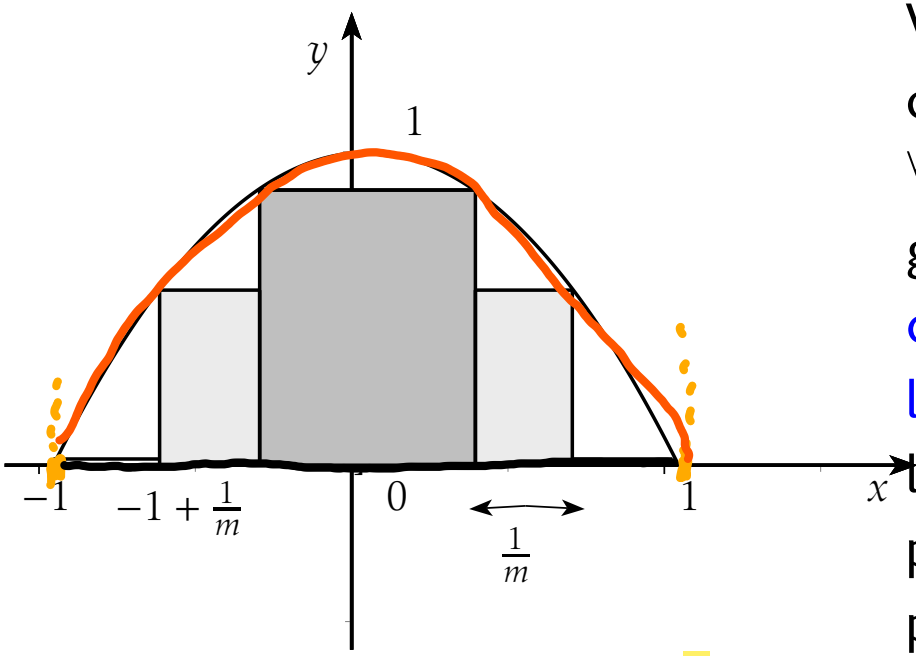


aire = ?

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?



Voici comment nous allons définir cette aire.
$\forall m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur $\frac{1}{m}$. En prenant la limite lorsque $m \to \infty$ (c'est-à-dire lorsque la subdivision devient très fine) nous pouvons espérer obtenir une valeur pour l'aire.

Cette valeur sera notée $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx$: elle désigne l'aire comprise entre la courbe $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses.

Contenu de la section

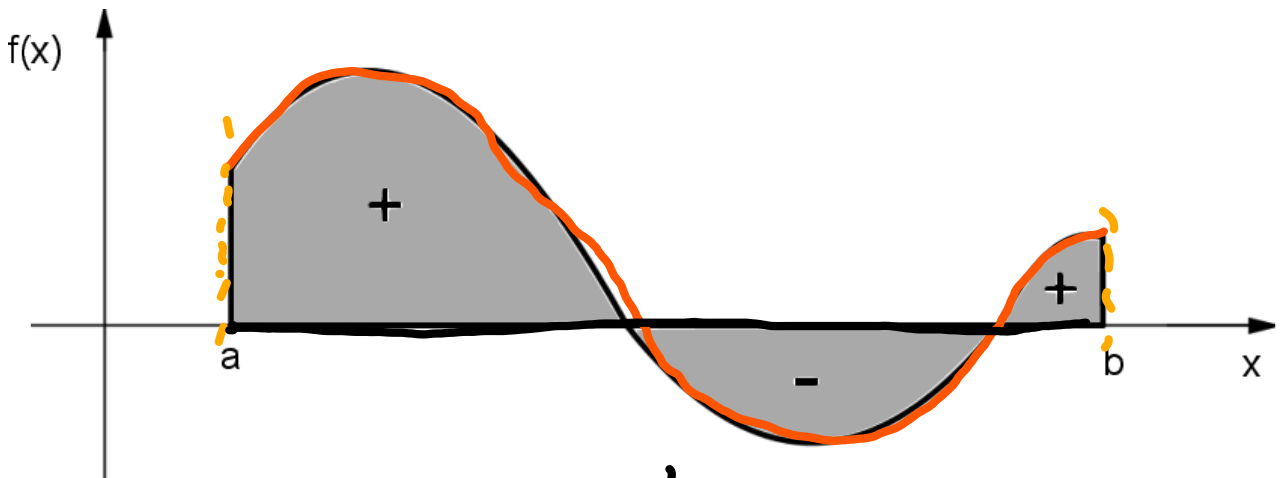
Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

"Définition"

Soit a, b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

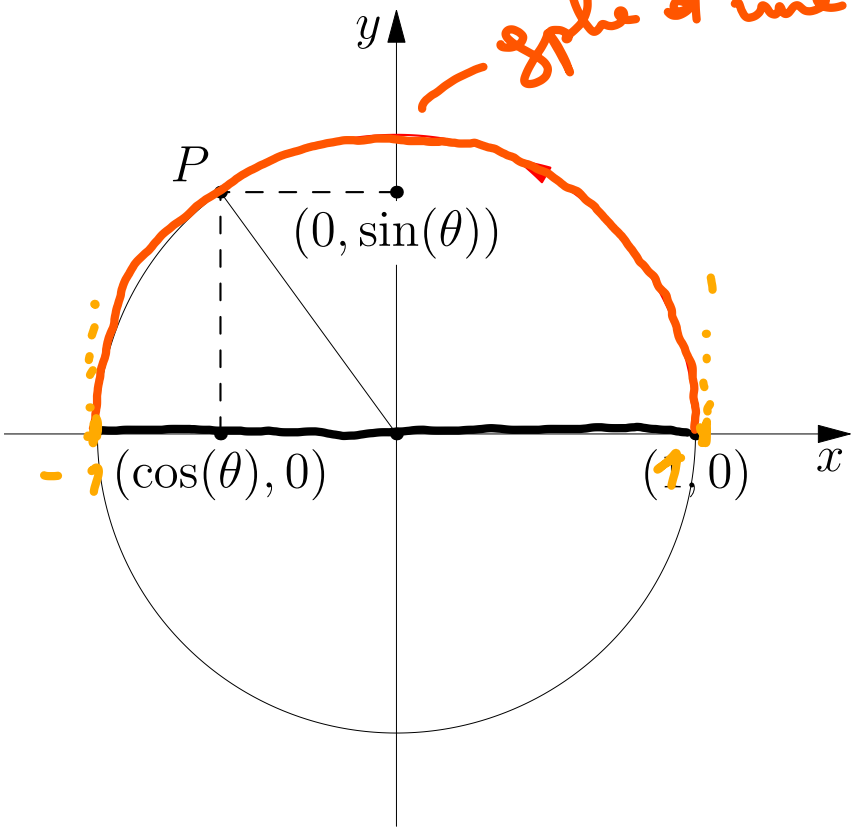
l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



de l'axe des abscisse

Les portions au-dessus seront comptées positivement, celles en-dessous négativement. Cette aire est définie en subdivisant la région grise en rectangles de plus en plus étroits et en prenant la limite.

Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les $y \geq 0$) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{avec } x \in [-1, 1],$$

et vaut donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Or, l'aire du disque unité vaut π, donc l'aire du demi-disque vaut $\frac{\pi}{2}$.
Ceci nous donne donc l'égalité:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

échange des bornes

Définition

Lorsque $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ comme:

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

En d'autres termes : renverser les bornes change le signe de l'intégrale définie.

Contenu de la section

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

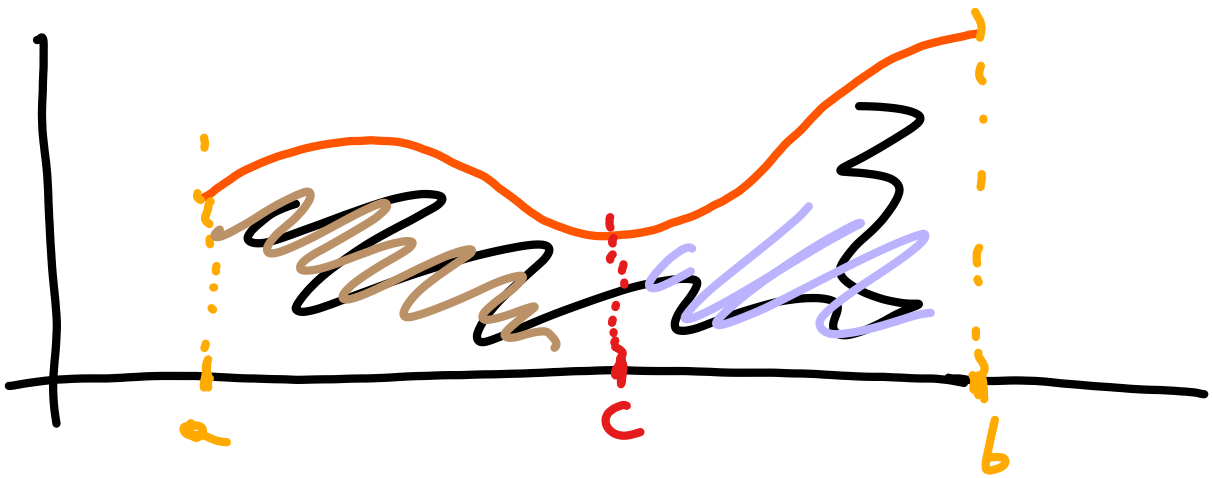
Additivité du domaine d'intégration

Résultat

Soit f une fonction continue. Pour $c \in \mathbb{R}$, si deux des trois intégrales suivantes existent, la troisième existe aussi et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est l'additivité par rapport au domaine d'intégration.



Linéarité de l'intégrale

Résultat

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

C'est la même propriété que pour les primitives!

Signe et intégrale

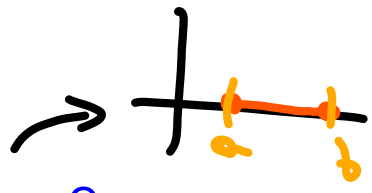
Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant $f(x) \geq 0$, $\forall x$ de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f(x) \geq 0$ nous avons même l'équivalence :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

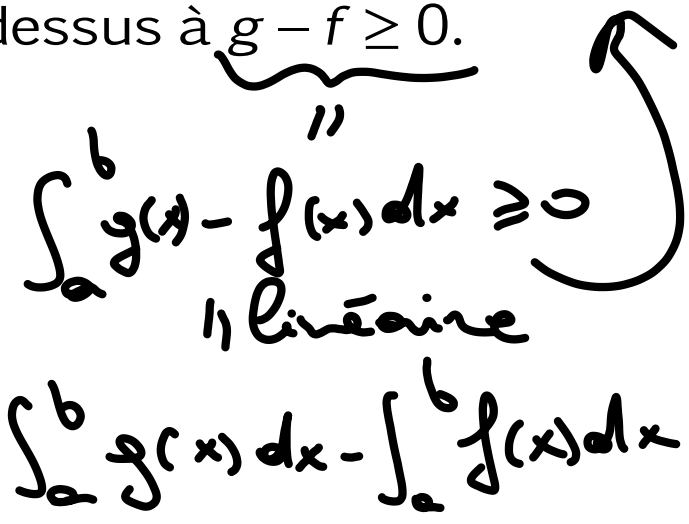


C'est normal, car si $f \geq 0$, l'aire algébrique sous sa courbe est positive. Et dire que l'aire est nulle revient alors à dire que la fonction est constante égale à 0.

Corollaire

En particulier, si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus à $g - f \geq 0$.



Contenu de la section

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

Comment calculer une intégrale?



L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental)

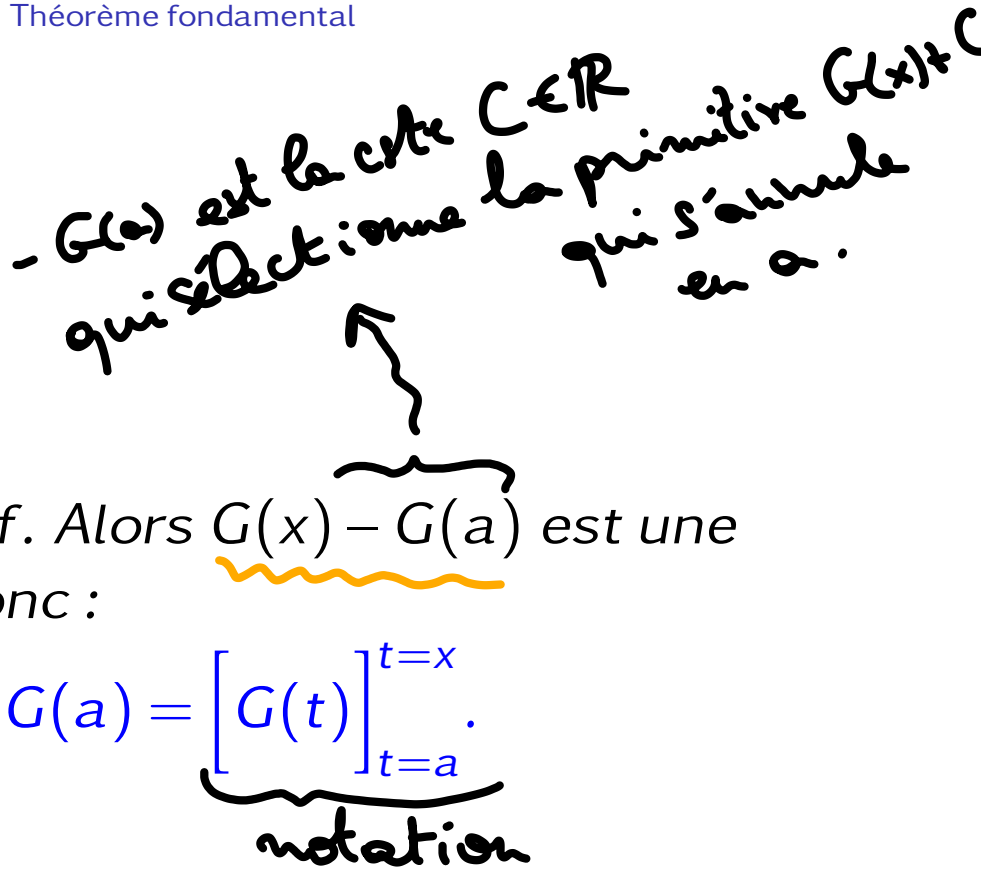
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Remarque

Ceci nous donne une manière de calculer $\int_a^x f(t)dt$: il suffit pour cela de calculer une primitive qui s'annule en a (ce qu'on sait faire dans beaucoup de cas, même si pas dans tous), et d'évaluer sa valeur en x.



Concrètement:

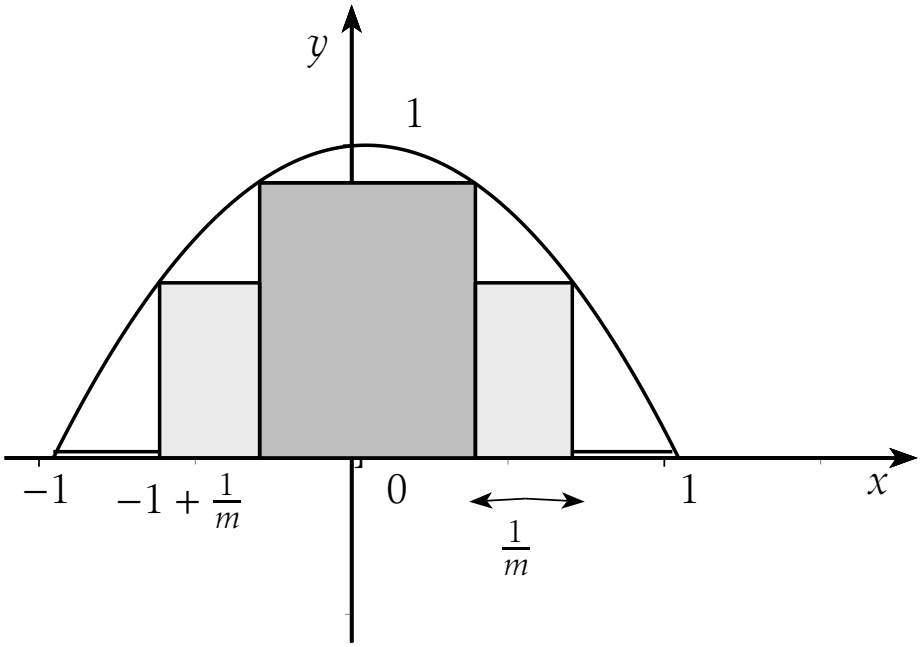
Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f. Alors $G(x) - G(a)$ est une primitive de f et s'annule en a, et donc :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a) = \Big[G(t)\Big]_{t=a}^{t=x}.$$

Si on calcule l'intégrale définie comme $G(x) - G(a)$ on n'a donc même pas besoin de faire attention aux constantes: il suffit de connaître une primitive de f.

Un exemple



Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

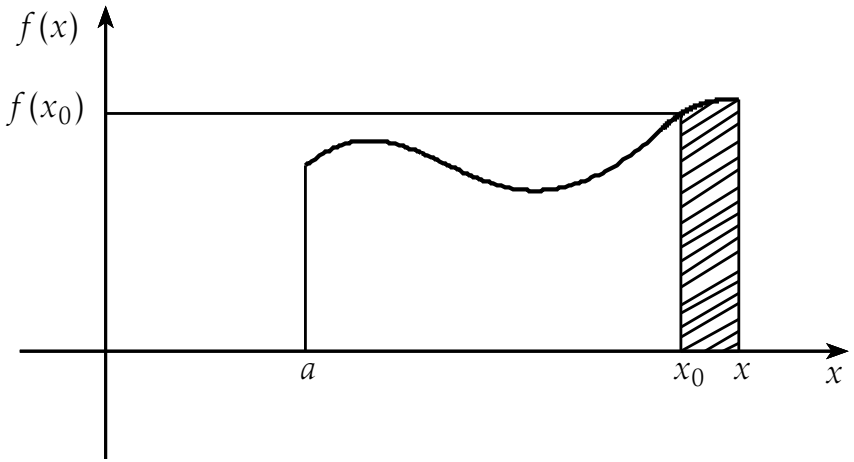
Preuve

Cette aire est $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$. *Une primitive de* $1-x^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *est* $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. *Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc:*

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) =$$

La dérivée de cette fonction F en un point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0}$$

Lorsque x est très proche de x_0, on peut considérer que les valeurs de f sur $[x_0, x]$ sont très proches de $f(x_0)$. Et donc que

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \qquad + o\big(x - x_0\big),$$

de sorte que:

$$F'(x_0) = \qquad .$$

Contenu de la section

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

Le changement de variables partie II

Grâce théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore. Si on cherche à calculer $\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$, on peut encore le faire avec le changement de variable $u = f(x)$: dans ce cas, il faut penser à changer les bornes dans la nouvelle intégrale, qui vont de $f(a)$ à $f(b)$:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \qquad g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $u =$, nous avons $\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[(\sqrt{u})^3\right] = \frac{2}{9} =$$

Vous pouvez vérifier qu'on obtiendrait le même résultat si on calculait une primitive de $\sqrt{3x+4}$ et qu'on calculait la différence de ses valeurs en 0 et -1.

Contenu de la section

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a, b \in \mathbb{R}$, et
- f est une fonction continue sur $[a, b]$.

Les applications requièrent (au moins) deux généralisations de ce concept :

- lorsque f est définie sur , et
- lorsque a ou b est

Intégrales définies
Introduction
Définition
Quelques propriétés de l'intégrale
Théorème fondamental
Intégration définie et indéfinie
Intégrales généralisées
Cas d'une fonction non bornée
Cas d'un domaine non borné

Cas d'une fonction non bornée

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a, b[$, nous posons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\quad} f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale

On procède similairement pour une fonction définie et continue sur $]a, b]$.

Exemple

Exemple

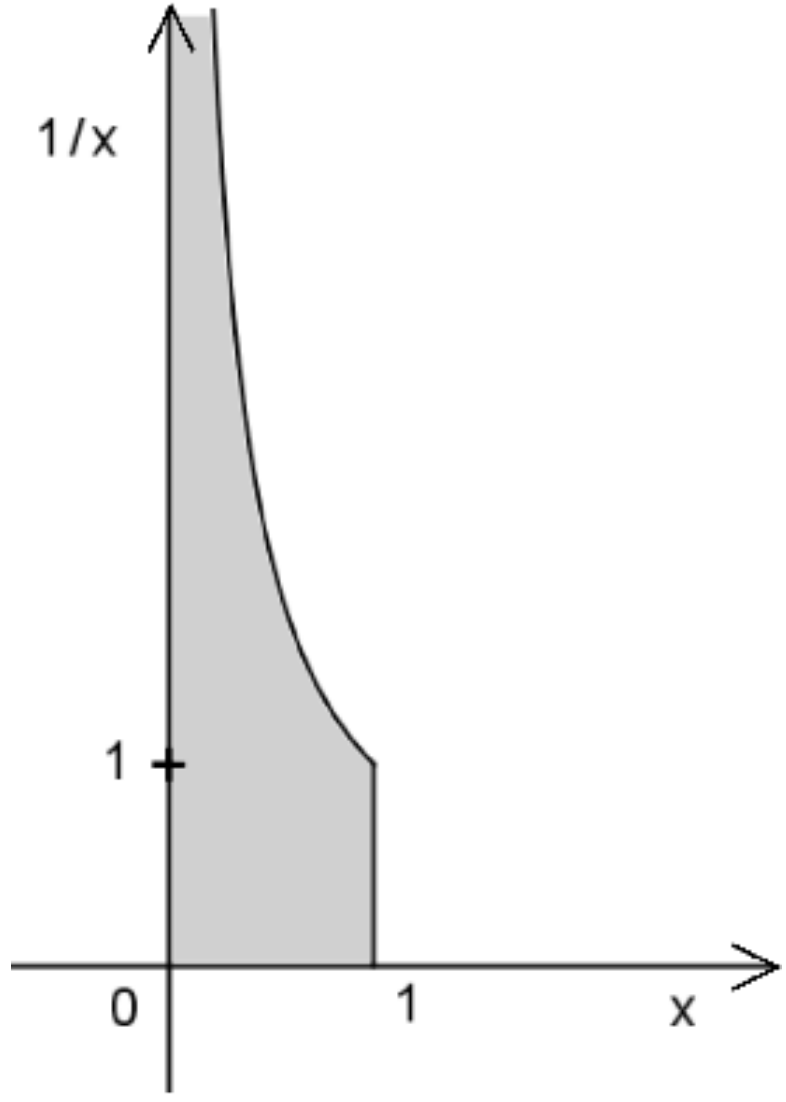
Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\int_{\quad}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \quad$$

$$= \quad =$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$, plus précisément elle tend vers $+\infty$.



L'aire grise dans la figure de droite est donc

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \Big[\quad\Big]^1$$

$$=$$

Donc :

- Si $a < 1$, alors l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{1-a}$, tandis que
- si $a \geq 1$, l'intégrale ne converge pas (le cas $a = 1$ ayant été fait ci-dessus.)

Intégrales définies
- Introduction
- Définition
- Quelques propriétés de l'intégrale
- Théorème fondamental
- Intégration définie et indéfinie
- Intégrales généralisées
  - Cas d'une fonction non bornée
  - Cas d'un domaine non borné

Cas d'un domaine non borné

Définition

Lorsqu'on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, nous posons

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sl cette dernière limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale

Exemple

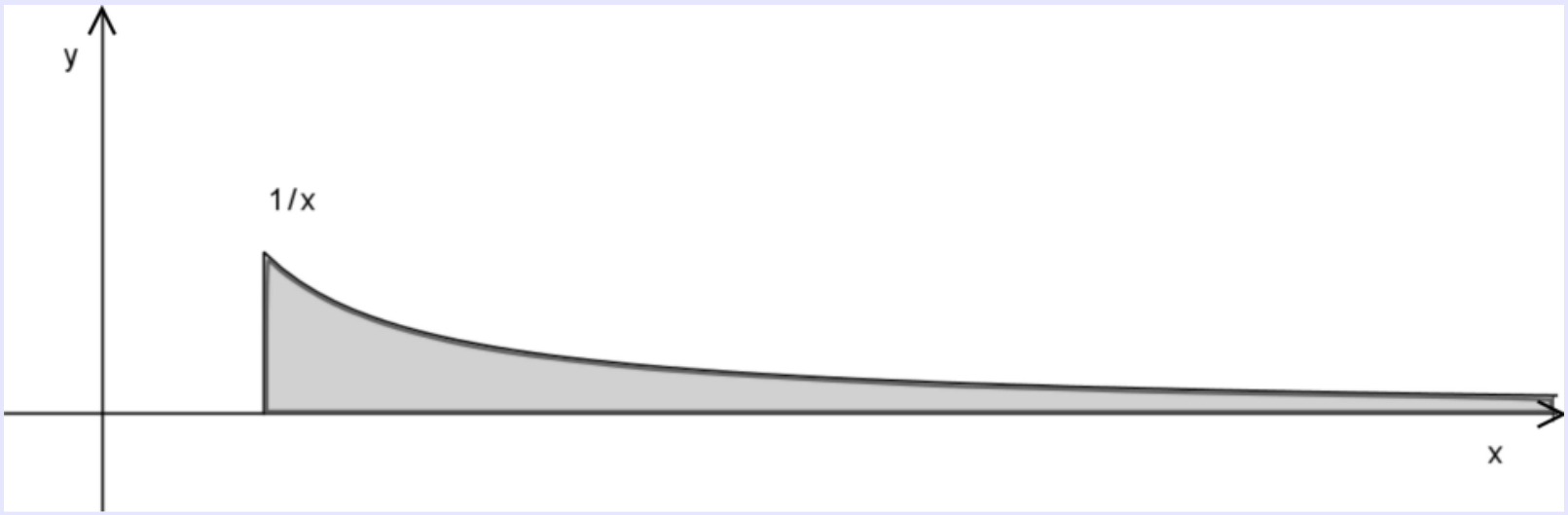
Soit

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\int_1 \frac{1}{x}\, dx =$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ La surface en gris:



est donc

Avec les intégrales (théorie et exercices)

Dés le prochain cours théorique nous commencerons la matière pour l'examen de