

Nombres

(Syllabus Chapitre II, jusqu'à 3.6)

Contenu de la section

Les nombres

Une description des nombres

Les nombres sont les objets de base en mathématiques.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dits "réels". Ce sont les nombres qu'on manipule habituellement. Parmi ces nombres on connaît plusieurs familles:

- ▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des (entiers) naturels (ils sont positifs ou nuls!).
- ▶ $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers (relatifs.)
- ▶ $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels (nombres qui s'écrivent comme fractions d'entiers): $\frac{3}{7}, \frac{11}{27}, \dots$

Les nombres réels qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire ne s'écrivent pas comme des fractions, sont dits "irrationnels". Ce sont par exemple $\sqrt{3}$, π , etc.)

Ces familles forment la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Le symbole $\subset$ signifie "être inclus dans".

Contenu de la section

Les nombres

Inégalités et notion d'ordre

Intervalles

Inégalités

Les nombres peuvent être comparés entre eux.

Définition

On dit que

- ▶ “ a est strictement inférieur à b ”, noté $a < b$, si a est plus petit et différent de b ;
- ▶ “ a est strictement supérieur à b ”, noté $a > b$, si a est plus grand et différent de b ;
- ▶ “ a est inférieur à b ” (ou “inférieur ou égal”), noté $a \leq b$, si a est plus petit ou égal à b ;
- ▶ “ a est supérieur à b ” (ou “supérieur ou égal”), noté $a \geq b$, si a est plus grand ou égal à b .

Exemple

Les affirmations suivantes sont vraies :

- ▶ $2 \leq 3$
- ▶ $2 < 3$
- ▶ $-2 \leq 1$
- ▶ $-2 \leq -1$
- ▶ $2 \geq 2$
- ▶ $5 > 3$

Exemple

Mais celles-ci sont fausses :

- ▶ $2 \geq 3$
- ▶ $-2 \geq -1$
- ▶ $2 < 2$
- ▶ $2 > 2$
- ▶ $5 < 3$

Règles de calcul avec les inégalités

Résultat

Pour tous réels a, b, c , nous avons :

- ▶ Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (prop d'anti-symétrie)
- ▶ Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (propriété de transitivité).

Résultat

Soient a, b des nombres réels tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel c nous avons

$$a + c \leq b + c.$$

De plus, si $c \geq 0$, on a

$$ac \leq bc,$$

et si $c \leq 0$, on a

$$ac \geq bc.$$

Attention en multipliant par des nombres négatifs

Faites attention dans les inégalités quand vous multipliez par des nombres négatifs: le sens de l'inégalité est alors inversé.

Exemple

On a bien $1 \leq 2$ mais si on multiplie par -1 , on a alors $-2 \leq -1$.

Règles de calcul avec les inégalités 2

Résultat

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $a \geq 0$ et $c \geq 0$, alors

*on garde $a \leq b$
et $c \leq d$*

$$ac \leq bd.$$

On va **démontrer** la première partie de ce résultat en utilisant la propriété du transparent précédent.

Preuve

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (transparent précédent). Et comme $c \leq d$, on a de même $b + c \leq b + d$. On obtient ainsi:

$$a + c \leq b + c \leq b + d$$

ce qui termine la preuve, *par transitivité*.

Le deuxième point se prouve de la même manière (faites-le en exercice)

Contenu de la section

Les nombres

Inégalités et notion d'ordre

Intervalles

sans trou

Un *intervalle* est un ensemble de nombres réels "continu".

Définition

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit les intervalles suivants :

- ▶ $[a, b]$ désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;
- ▶ $]a, b]$ désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;
- ▶ $[a, b[$ désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;
- ▶ $]a, b[$ désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;
- ▶ $] -\infty, b[$ désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;
- ▶ $] -\infty, b]$ désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;
- ▶ $] a, +\infty[$ désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;
- ▶ $] a, +\infty]$ désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;

Des exemples

Exemple

- ▶ L'intervalle $]-\infty, \infty[$ désigne l'ensemble des réels, c'est l'ensemble $\mathbb{R}$ entier.
- ▶ L'ensemble des réels positifs ou nuls $[0, +\infty[$ est également noté $\mathbb{R}^+$
- ▶ L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0, +\infty[$, noté $\mathbb{R}_0^+$
- ▶ L'ensemble des réels *différents de 0* n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou. C'est en revanche *l'union disjointe de deux intervalles*: les réels strictement à gauche de 0, $]-\infty, 0[$, et ceux strictement à droite, $]0, +\infty[$. On le note parfois:

$$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Un intervalle est généralement “infini” car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins “borné”

Exemple

- ▶ L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. Mais il est **borné**, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- ▶ L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4. On le note $\{4\}$. *si on admet $a \leq b$ dans les bornes.*
- ▶ L'intervalle $]4, 4[$ ne contient aucun nombre, car aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Faites attention aux notations avec les intervalles.

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeur absolue

Puissances

Racines n -èmes

Notation générale de somme

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \dots$$

Il est difficile d'écrire ces sommes quand le nombre d'entiers devient grand, ou jusqu'à une valeur quelconque. On utilise pour cela un *symbole de sommation* comme suit :

par rapport à la déf
 a_1, a_2, a_3, a_4

Définition

- Si n est un entier positif et si $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels, on définit :

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

- Si m et n sont des entiers avec $m \leq n$ et si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres réels, on définit de manière similaire:

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Il s'agit juste d'une notation concise pour écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} \textcircled{k} = \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{2}_{k=2} + \dots + \underbrace{100}_{k=100} \quad \text{Gauss} \quad \frac{100(100+1)}{2}$$

$$a_k = k^2 \quad \sum_{k=1}^{100} k^2 = \underbrace{1}_{\text{si } k=1, k^2=1} + \underbrace{4}_{\text{si } k=2, k^2=4} + 9 + \dots + \underbrace{10000}_{\text{si } k=100, k^2=10000}$$

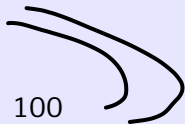
$$\rightarrow \sum_{k=5}^{10} (k-1) = \underbrace{4}_{\text{si } k=5, k-1=4} + \underbrace{5}_{k=6, k-1=5} + 6 + 7 + 8 + 9 \quad \underbrace{\quad}_{k=10, k-1=9}$$

$a_k = k-1$

Exemple

distributivité

$$\left(\frac{1}{100}\right) \sum_{k=1}^{100} k = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 100}{100}$$


$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{100} = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{100}{100}$$


Multiplier par un nombre réel à l'intérieur de la somme ou à l'extérieur ne change donc rien.

On a en particulier montré au cours précédent que pour tout entier positif n ,

$$\sum_{k=0}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriétés

Le symbole de somme est **une notation**, donc il vérifie les mêmes propriétés que la somme de nombre:

Résultat

enlever le (), regrouper les a et les b

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$$

$$= \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^n b_k \right)$$

*commutativité
associativité.*

$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

distributivité.

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{n+m-k} = a_{n+n-m} + a_{n+n-(m+1)} + \dots + a_{n+n-n}$$

Le dernier résultat dit juste que si on somme des éléments dans un sens ou dans l'autre, **le résultat ne change pas**:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1} + a_m$$

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeur absolue

Puissances

Racines n -èmes

Définition

Définition

Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie par:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- ▶ $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- ▶ $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- ▶ 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$ (premier cas).

Remarque

Si x, y sont des réels, alors $|x - y|$ s'interprète comme la distance entre x et y . En particulier, $|x|$ est la distance de x à 0.

Propriétés

Résultat

Pour tous x, y , nous avons

$$|x| = |-x|$$

$$|x - y| = |y - x|$$

Preuve

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- ▶ Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$, donc $|x| = |-x| = 0$.
- ▶ Si $x > 0$, alors $|x| = x$. Et $-x < 0$ donc $|-x| = -(-x) = x = |x|$.
- ▶ Si $x < 0$, alors $|x| = -x$. Et $-x > 0$ donc $|-x| = -x = |x|$.

Pour la seconde égalité, notons simplement que $x - y = -(y - x)$.

→ comme $|x| = |-x|$
on a $|x - y| = |-(y - x)|$
 $= |y - x|$.

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeur absolue

Puissances

Racines n -èmes

Sur la notation des produits

Généralement, le produit entre deux quantités inconnues se note juste en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire “ a fois b ”, et $3x$ veut dire “3 fois x ”.

Exemple

Attention: si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion. Lorsqu'on multiplie des nombres et non pas des inconnues, on rajoute un point: $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5. Nous utiliserons très rarement la notation 3×5 , pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x .

Puissances

Lorsque k est un entier positif et x un nombre réel nous avons déjà défini :

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ fois}}.$$

Dans le cas particulier où $k = 0$ on impose: $x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Définition

Si x est un nombre réel différent de 0 nous définissons:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

*l'inverse multiplicatif
de x .*

De la même manière, si k est un entier positif on définit

$$x^{-k} = \left(x^{-1}\right)^k = \frac{1}{x^k}.$$

Attention: l'inverse de 0 n'existe pas, donc on ne peut écrire x^{-k} que si $x \neq 0$.

Propriétés des puissances

On calcule alors avec ces puissances négatives comme on le ferait si l'exposant était positif:

Résultat

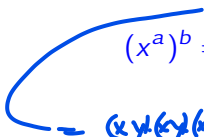
Pour tous réels x, y non nuls et pour tous entiers a, b (qui peuvent être négatifs), nous avons

$$x^a y^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ fois}} \cdot \underbrace{y \cdots y}_{a \text{ fois}}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$



$$\underbrace{(xy)(xy)(xy) \cdots}_{a \text{ facteurs } xy} = (xy)^a$$

Démonstration pour un cas particulier

Exemple

Si x est un réel, et si k et l sont des entiers **naturels**, on va montrer que

$$x^k x^l = x^{k+l}.$$

Preuve

Soient k et l des entiers naturels. On calcule les deux membres de l'égalité séparément. D'une part,

$$\begin{aligned} x^k \cdot x^l &= \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ fois}} \cdot \underbrace{x \cdots x}_{l \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \cdots x}_{k+l \text{ fois}}. \end{aligned}$$

D'autre part, $x^{k+l} = \underbrace{x \cdots x}_{k+l \text{ fois}}$ par définition. On a donc $x^k x^l = x^{k+l}$.

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeur absolue

Puissances

Racines n -èmes

Racines n -èmes

On va décrire maintenant l'opération inverse de la puissance.

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*, notée $\sqrt{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut t .

Exemple

On sait que $5^2 = 25$. Comme $5 \geq 0$, on écrira donc
$$\sqrt{25} = 5.$$

Par définition, le carré de $\sqrt{t}$ vaut t . On utilisera souvent ça dans les calculs sous la forme de la relation suivante:

$$(\sqrt{t})^2 = t$$

pour un nombre réel $t \geq 0$.

Remarques

Remarque

La racine carrée d'un nombre négatif **n'existe pas!** On ne pourra donc écrire $\sqrt{t}$ qu'après s'être assurés que t est un nombre réel positif ou nul.

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement **deux** nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$. *car $(-1)^2 = 1$.*

Le premier est positif, le second est négatif. Celui qu'on appellera "la racine carrée de t " est bien le premier.

Racines n -èmes

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3 , x^4 , etc.

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Si t est un réel positif ou nul, sa racine n -ème, notée $\sqrt[n]{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont la puissance n -ème vaut t .

Comme précédemment on pourra donc écrire que

$$(\sqrt[n]{t})^n = t$$

pour un nombre réel $t \geq 0$.

Exemple

Par exemple, $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$. Ou $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$.

$\sqrt{3}$ est en fait $\sqrt[2]{3}$

racine cubique ou 3-ièmes.

Puissances rationnelles

On utilisera souvent une autre notation pour la racine n -ème:

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Si t est un réel positif ou nul on notera aussi $\sqrt[n]{t}$ comme $t^{\frac{1}{n}}$.

Cette notation devient pratique pour les calculs: en effet,

$$\left(t^{\frac{1}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{t})^n = t = t^1.$$

Ceci permet donc d'utiliser la règle suivante:

$$\left(t^{\frac{1}{n}}\right)^n = t^{\frac{n}{n}} = t^1 = t$$

Cette définition se généralise à des puissances rationnelles:

Définition

Si p et q sont des entiers naturels, on définit $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Cela coïncide avec la définition usuelle dès que p/q est un entier.

Propriétés

Définition

Comme avant, si p et q sont des entiers naturels, on définit de même

$$x^{-p/q} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{(\sqrt[q]{x})^p}.$$

Les propriétés pour calculer avec les puissances **restent vraies pour des puissances rationnelles**:

Résultat

Pour tous réels positifs ou nuls x, y , et pour tous nombres **rationnels** a, b (donc $a = p/q, b = r/s$ avec p, q, r, s entiers naturels), nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$