TP en petit gpe à partir de la semaine du 28/09

Généralités sur les fonctions

(Syllabus Chapitre IV, sauf parties 3 à 6)

Contenu de la section

Fonctions

Contenu de la section

Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

Définition générale

Définition

Une *fonction f* c'est :

- un *ensemble de départ A*, ou domaine
- un *ensemble d'arrivée B* et
- une règle qui associe à chaque élément x de A un unique élément de B, noté $f(x)$.

Une fonction est donc une manière d'associer à tout élément x de A un élément $f(x)$ de B.

- $f(x)$ est l'*image* de x par f.
- On dit aussi que x est un *antécédent* de $f(x)$. une pré-image

La notation pour une fonction f de A dans B est

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ ou encore } f : A \to B : x \mapsto f(x).$$

Exemple

Voici quelques exemples de fonctions :

- Une fonction associant à chaque réel son carré
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$
Ici $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.
- la fonction valeur absolue
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|.$$
Ici $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$.
- Soit A l'ensemble des bouteilles dans un frigo donné et B l'ensemble des nombres réels positifs. Si à chaque bouteille on associe la température du liquide qu'elle contient on a défini une fonction.
- Soit A l'ensemble des étudiant-e-s à l'ULB. Soit B l'ensemble des nombres naturels. À chaque étudiant-e x on associe son numéro de matricule, noté $f(x)$. Ceci définit une fonction f de A dans B.

Une fonction peut donc concerner autre chose que des nombres et est en général juste une loi de correspondance. Mais la plupart des fonctions qu'on étudiera dans ce cours seront définies sur les nombres réels.

Mise en garde

Pour qu'une fonction soit bien définie il faut que tout point de l'ensemble de départ A ait une image.

Exemple

La notation

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

ne définit pas une fonction. Car 0 n'a pas d'inverse, et donc pas d'image par f.

Si on impose une image arbitraire pour 0, par exemple:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on obtient bien une fonction. On obtient encore une fonction si on change d'ensemble de départ, par exemple

$$h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Cette nouvelle fonction est alors uniquement définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Un exemple

Exemple

Est-ce que

$$g : [-1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

définit correctement une fonction? Si non, comment la modifier pour qu'elle en définisse bien une?

Non, g ne définit pas une fonction, car la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie. Donc $g(-1)$ n'a pas de sens.

$\sqrt{-1}$

En revanche

$$h : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

définit bien maintenant une fonction, la fonction racine carrée.

Contenu de la section

Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

Exemple

Comment choisir le domaine $A \subset \mathbb{R}$ pour que

$$f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

définisse une fonction ?

La fonction a du sens dès que le dénominateur de la fraction est différent de 0.

Or, $x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$.

N'importe quel domaine A ne contenant ni 1 ni -1 convient.

Généralement, nous prenons "le plus grand possible", c'est-à-dire $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Remarque

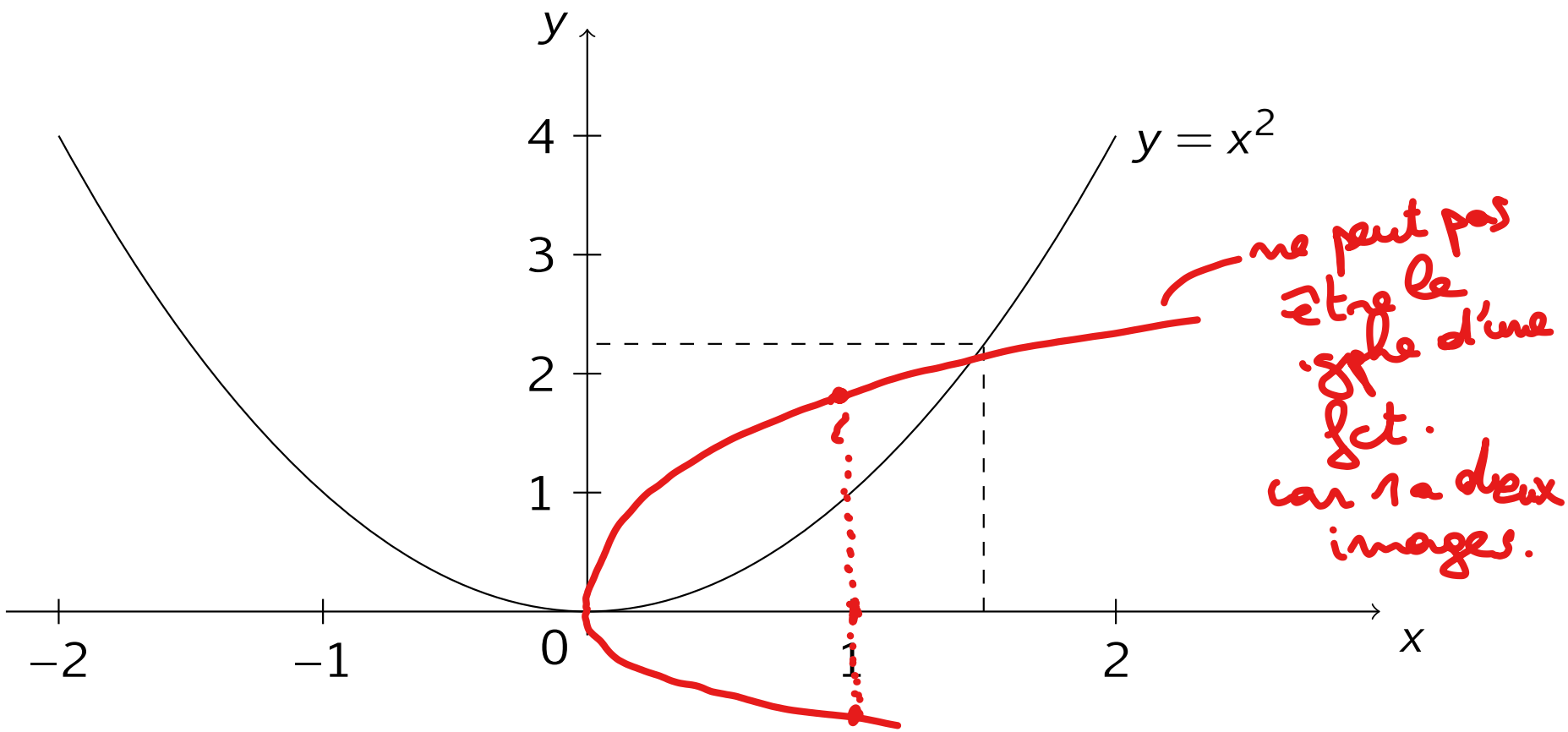
La règle qui donne $f(x)$ sera souvent une simple formule contenant la variable x. Mais parfois la recette est plus complexe, et parfois il n'y a aucune formule.

Graphe de fonction

Définition

Le graphe d'une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$.

Par définition, il s'agit donc des solutions de l'équation $y = f(x)$.



Contenu de la section

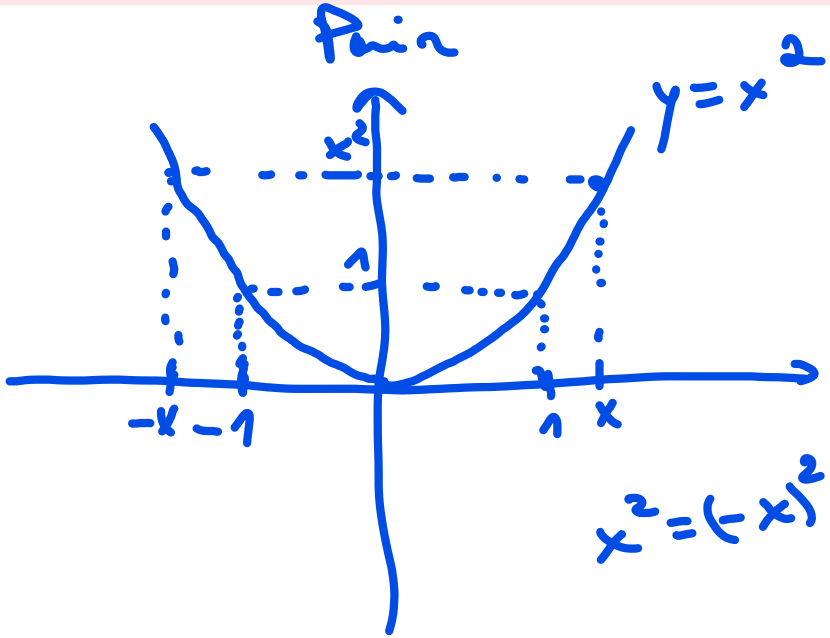
Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

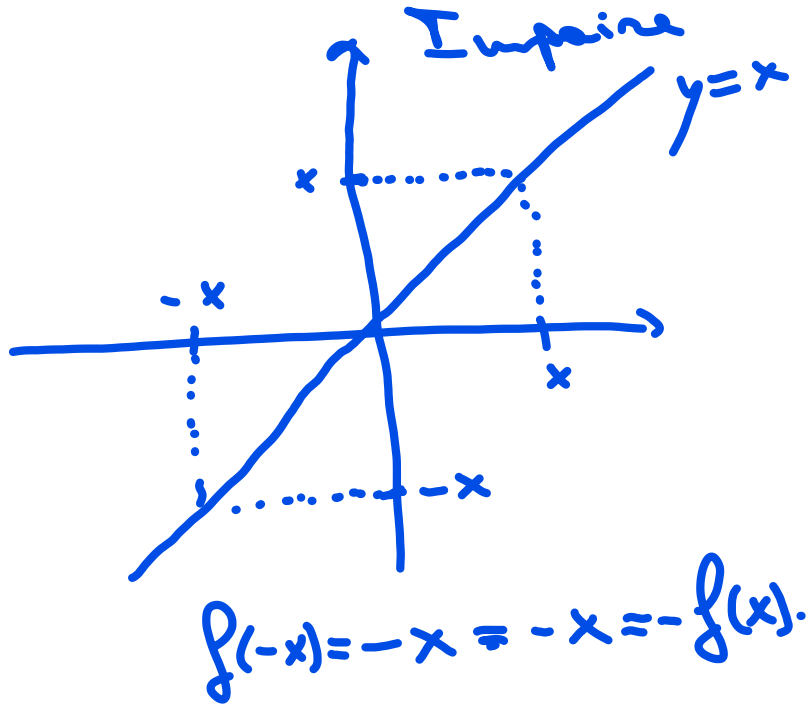
Définition

Définition

Une fonction $f : A \to B$, avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ est :

- *paire* si et seulement si pour tout x de A, on a $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.
- *impaire* si et seulement si pour tout x de A, on a $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.





Attention, la définition de paire et impaire demande que le domaine A soit symétrique par rapport à 0.
(ce que signifie que $-x \in A$ pour tout $x \in A$).

Remarque

Une fonction est paire $\iff$ son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction est impaire $\iff$ son graphe est symétrique par rapport à l'origine $(0,0)$.

Exemples

- La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est paire.

Preuve : $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$ (le dom est sym).

En effet: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

↳ objectif $f(-x) = \ldots$ calcul $= f(x)$ □

- La fonction définie par $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.

Preuve : $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

En effet: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

↳ Objectif : $f(-x) = \ldots$ calcul $= -f(x)$.

- La fonction définie par $f : [-2, +\infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est rien du tout!
  Car $[-2, \infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
  Par exemple: $3 \in [-2, \infty[$ mais $-3 \notin [-2, \infty[$.

dom symétrique

- La fonction définie par $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$ est rien du tout!

↳ car $x = 1$: $f(1) = 0$ mais $f(-1) = 4 \neq 0$

La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\text{fonction paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\text{fonction impaire}}.$$

La somme de fonctions paires est paire.

Résultat

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- *Si f et g sont paires alors la fonction $f + g$ est encore paire.*
- *Si f et g sont impaires alors la fonction $f + g$ est encore impaire.*

$[f+g: A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)]$

Preuve

On montre le cas impair. Supposons que f et g sont impaires. Soit $x \in A$. Alors, par hypothèse, $-x \in A$. On calcule alors:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont impaires}$$

$$= -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x).$$

La preuve dans le cas pair se fait de la même manière.

Attention, la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire n'est en général rien du tout.

Contenu de la section

Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

Fonctions polynomiales

Définition

Les *fonctions polynômiales* sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles,et n est un entier.
L'entier n est le *degré* de la fonction (si $a_n \neq 0$).

Exemple

$f(x) = 1 + 3x^2 - 7x^7$ est une fonction polynomiale, de degré 7.

- $x \mapsto a_0$ de degré 0 si $a_0 \neq 0$
- $x \mapsto 0$ de degré $-\infty$ (convention)

Fonctions racine n-ème 1

Nous avons défini les fonctions racine n-ème sur les nombres réels positifs ou nuls.
La première chose à remarquer est que, lorsque n est impair, la fonction racine n-ème est encore bien définie sur tous les réels.

En effet, soit t un nombre réel positif ou nul et n un entier naturel impair. On sait que $\left(\sqrt[n]{t}\right)^n = t$. Comme n est impair, on a alors aussi

$$\left(-\sqrt[n]{t}\right)^n = (-1)^n\left(\sqrt[n]{t}\right)^n = -t.$$

Ainsi, $-\sqrt[n]{t}$ est la racine n-ème de $-t$.

Définition

Si n est un entier naturel impair et $t \geq 0$ on définit $\sqrt[n]{-t} = -\sqrt[n]{t}$. Ceci définit une fonction racine n-ème sur $\mathbb{R}$ tout entier qui est impaire.

Attention: la fonction racine n-ème pour n pair est toujours uniquement définie sur $\mathbb{R}^+$.

Fonctions racine n-ème 2

Définition

Pour n naturel pair, nous avons donc une fonction racine n-ème définie sur $\mathbb{R}^+$:

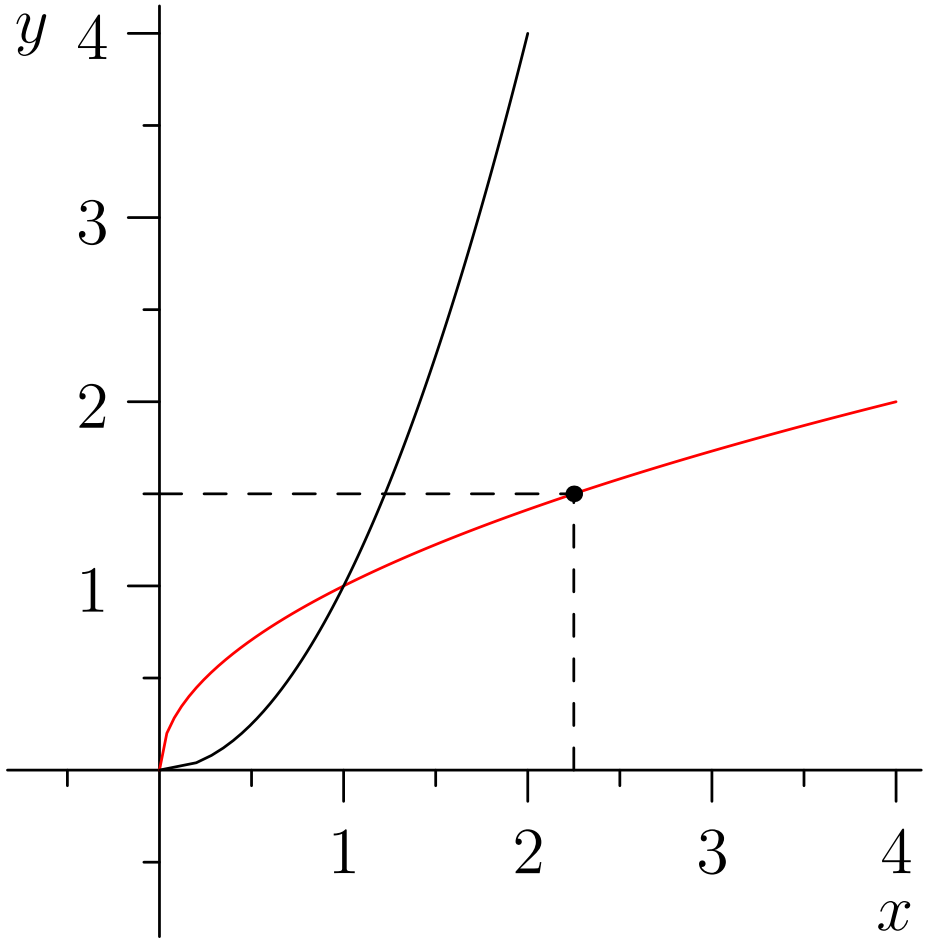
$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

et pour n naturel impair, nous avons donc une fonction racine n-ème définie sur $\mathbb{R}$ entier :

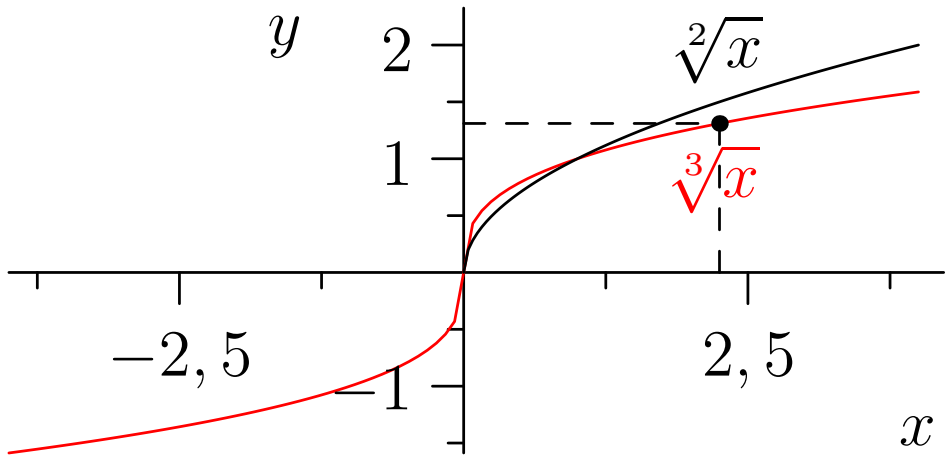
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Si n est pair, on a donc $\left(\sqrt[n]{t}\right)^n = t$ pour tout $t \geq 0$.

Si n est impair on a $\left(\sqrt[n]{t}\right)^n = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans le cas où n est impair, la fonction racine est impaire.



La fonction racine carrée est en rouge.
En noir, c'est la fonction $x \mapsto x^2$.



Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Contenu de la section

Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

Croissance et décroissance

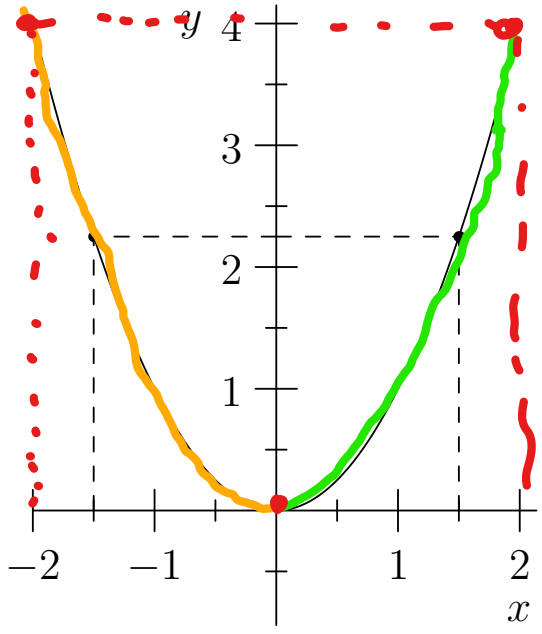
Définition

Soit f une fonction réelle définie sur $A \subset \mathbb{R}$. Cette fonction est

- *croissante* sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- *décroissante* sur A si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- *strictement croissante* sur A si pour tout x, y dans A :
  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- *strictement décroissante* sur A si pour tout x, y dans A :
  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Exemples

Qu'en est-il de $x \mapsto x^2$? La fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:



- $-2 \leq 0$ mais $f(-2) > f(0)$ ($4 > 0$) → pas croissante.
- $0 \leq 2$ mais $f(0) < f(2)$ ($0 < 4$) → pas décroissante

Sur $\mathbb{R}$, elle n'est ni croissante ni décroissante; on dit qu'elle n'est pas monotone.

Contenu de la section

Fonctions
- Généralités sur les fonctions
- Propriétés des fonctions
- Parité
- Fonctions polynômes et racines
- Fonctions croissantes et décroissantes
- Les fonctions exponentielles et logarithmes

Exponentielles

Définition

Les *fonctions exponentielles* sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la *base* de l'exponentielle.

strictement

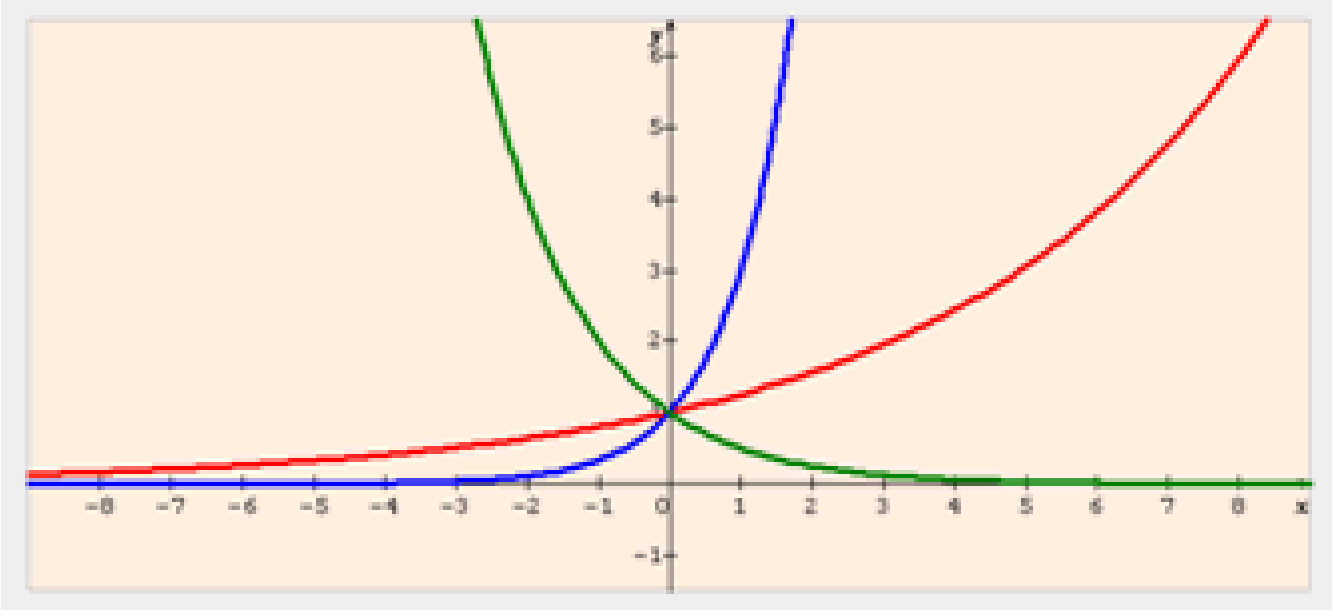
Définition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante spéciale appelée... "le nombre e."

Remarque

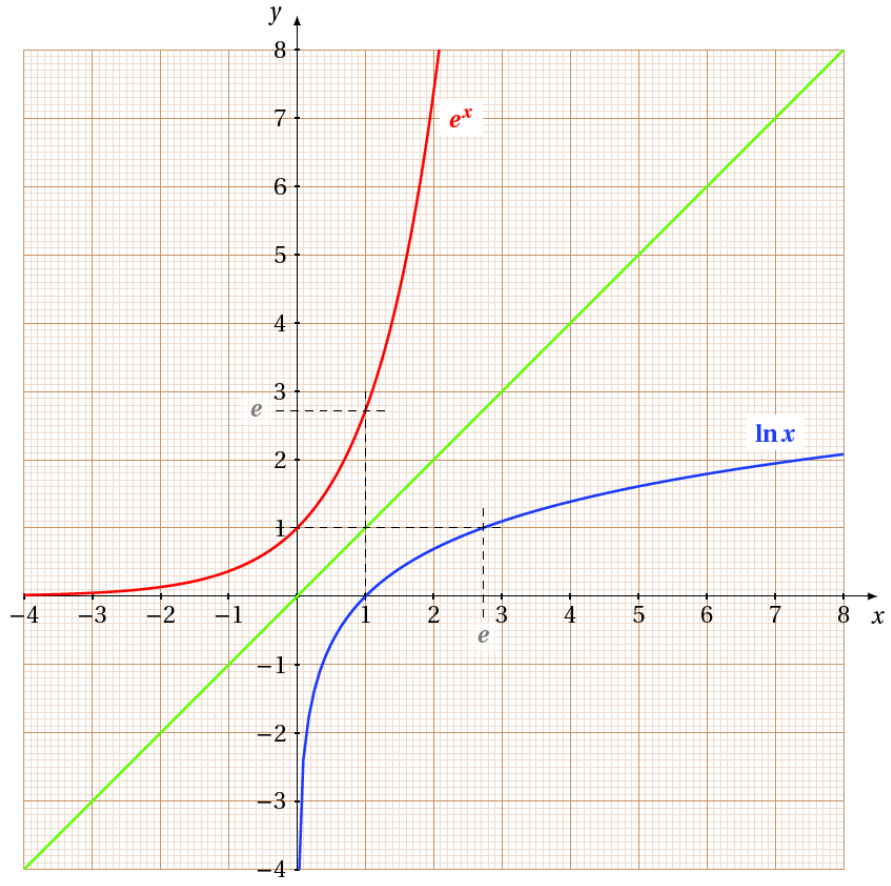
- Domaine $= \mathbb{R}$ Image $= \mathbb{R}_0^+ =]0, \infty[$.
- Si $a > 1$, l'exponentielle est croissante !
- Si $0 < a < 1$, l'exponentielle est décroissante !

Exponentielles



Graphe

La ligne rouge est la ligne intéressante pour l'instant : c'est le graphe de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.



Quelle est l'utilité de la fonction exponentielle?

La fonction exponentielle sert à décrire des phénomènes physiques et/ou biologiques où rentre en jeu une quantité dont les variations sont proportionnelles à la valeur de la quantité en tout instant.

Exemple

On injecte à un lapin, par voie intramusculaire, une substance qui n'est pas naturellement présente dans son organisme.
On note $Q(t)$ la quantité au temps t.
La substance est dégradée proportionnellement à sa concentration : pendant un laps de temps Δt, la quantité de substance dégradée est

$$\Delta Q = -K\Delta t \cdot Q$$

où $K > 0$ est un paramètre. L'évolution de Q se décrit alors par:

$$Q(t) = Q_0 e^{-Kt}$$

Logarithme

La fonction logarithme est une manière de retrouver l'exposant dans l'exponentielle en connaissant le résultat du calcul.

Définition

Le logarithme de y en base a est l'unique nombre x tel que $a^x = y$. On le note $\log_a(y)$

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

En particulier vu que $a^x > 0$, les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine $\mathbb{R}_0^+ =]0, +\infty[$. Et elles ont pour ensemble image $\mathbb{R}$.

L'exponentielle de base e et le logarithme népérien

On notera la fonction exponentielle, celle de base e $\simeq 2.7182818\ldots$, alternativement comme $\exp(x)$ ou e^x.

Le logarithme de base e est juste noté $\ln$ et est appelé logarithme népérien. Ainsi:

$$x = \ln y \iff e^x = y.$$

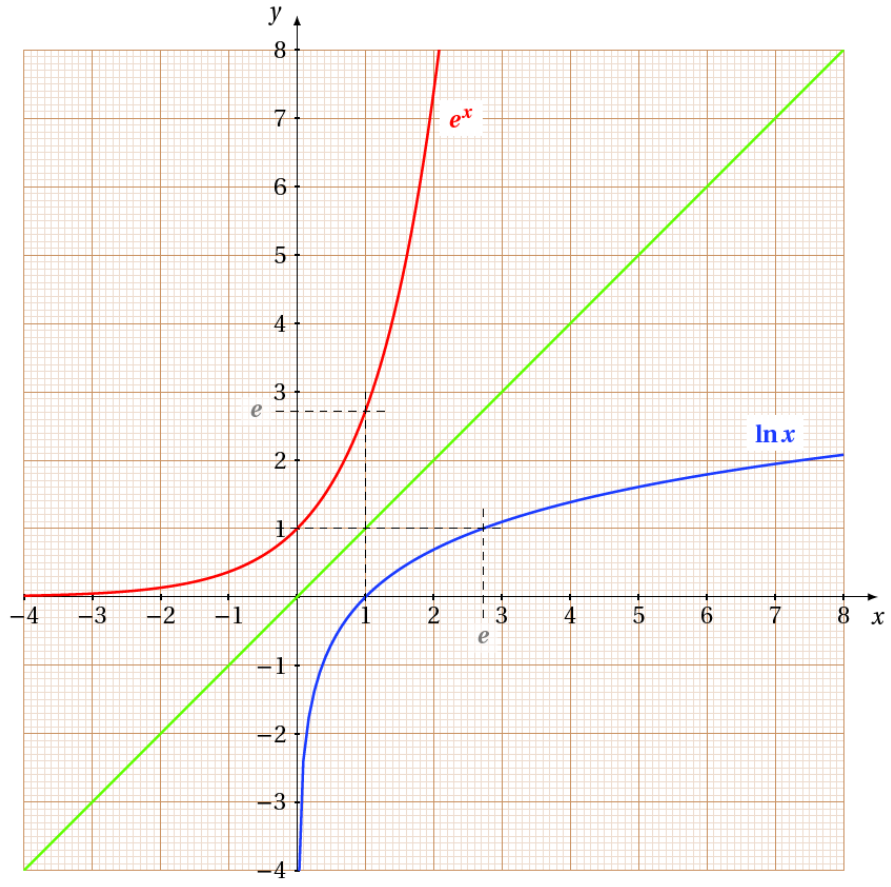
En particulier:

$$e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0.$$

Autres bases avec notation particulière
En sciences: $a = 10$ $\log_{10}(x)$ se note simplement $\log(x)$.
En informatique: $a = 2$ $\log_2(x)$ se note aussi $\log(x)$.

Graphe

Revenons aux graphes : en bleu nous avons le graphe de la fonction logarithme népérien $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.



Règles de calcul

Résultat

Pour $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(\ln a) = a$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\exp(x + y) = \exp x \exp y$

Résultat

Pour $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\ln(\exp x) = x$,
- $\ln 1 = 0$,
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- $\ln(a^x) = x \ln a$
- $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$. (formule de changement de base).