Trigonométrie

(Syllabus Chapitre VI)

Contenu de la section

Trigonométrie

La trigonométrie c'est l'étude des triangles. Plus spécifiquement, l'étude des liens entre

- la mesure des angles, et
- la mesure des côtés dans un triangle.

Plus généralement, la trigonométrie devient l'étude des angles.

Question

Comment mesurer des angles ?

Contenu de la section

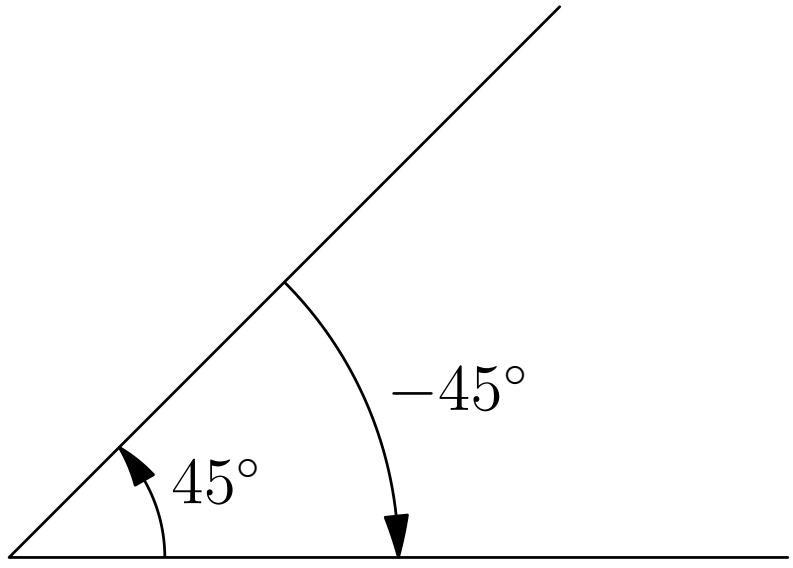
Trigonométrie
La notion d'angle : généralités
Le radian

Intuitivement, un angle est une fraction de "faire un tour complet".
Pour le mesurer on utilisera généralement:

- le degré (1 tour = 360 degrés), ou
- le radian (1 tour = 2π radians)

$360° = 2\pi$ rad $\leftrightarrow$ $1° = \frac{2\pi}{360}$ rad, $1\text{ rad} = \frac{360}{2\pi}°$.

Le radian sera notre choix. Mathématiquement parlant, c'est le plus efficace car ça ne nécessite pas de manipuler de gros multiples.



Faire un demi tour dans un sens ou dans l'autre n'est pas pareil.
$\Rightarrow$ on parle d'angle orienté lorsque cela est important !
Dans le plan :

Orientation positive Sens anti-horaire

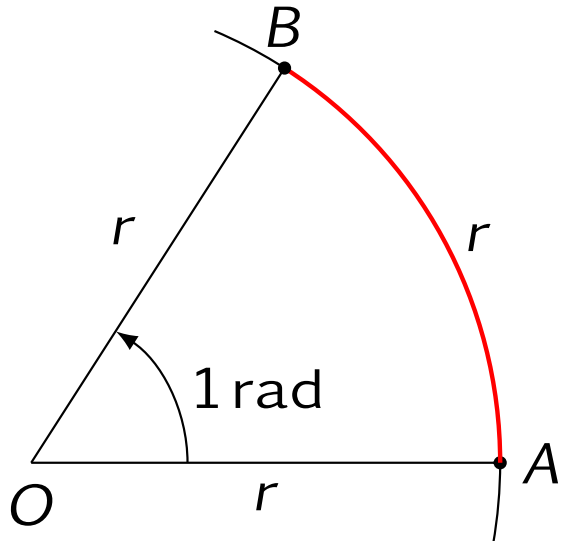
Orientation négative Sens horaire

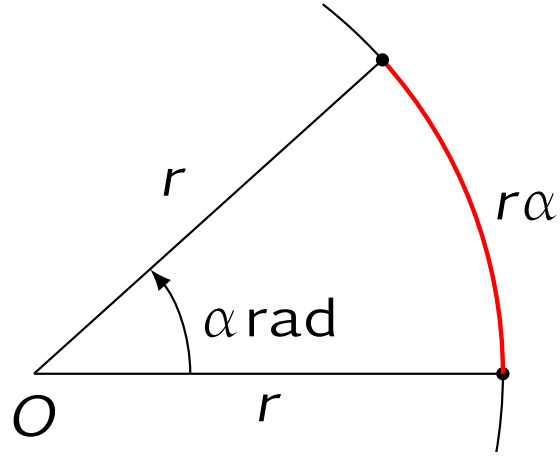
Contenu de la section

Trigonométrie
La notion d'angle : généralités
Le radian

Pourquoi 2π ?

Un *radian* (1 rad) correspond à l'angle au centre d'un cercle qui intercepte, sur la circonférence, un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.





et 2π rad = tour complet ↓ circonf du cercle $2\pi r$.

Plus généralement, un angle de α rad au centre intercepte sur la circonférence un arc de longueur $r\alpha$. Pour cette raison le radian est idéal pour calculer et manipuler des longueurs d'arcs !

Pour passer du radian au degré et inversement, retenons que

Par habitude, nous retiendrons également le tableau suivant :

en radians	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
en degrés	30°	45°	60°	90°	180°	360°

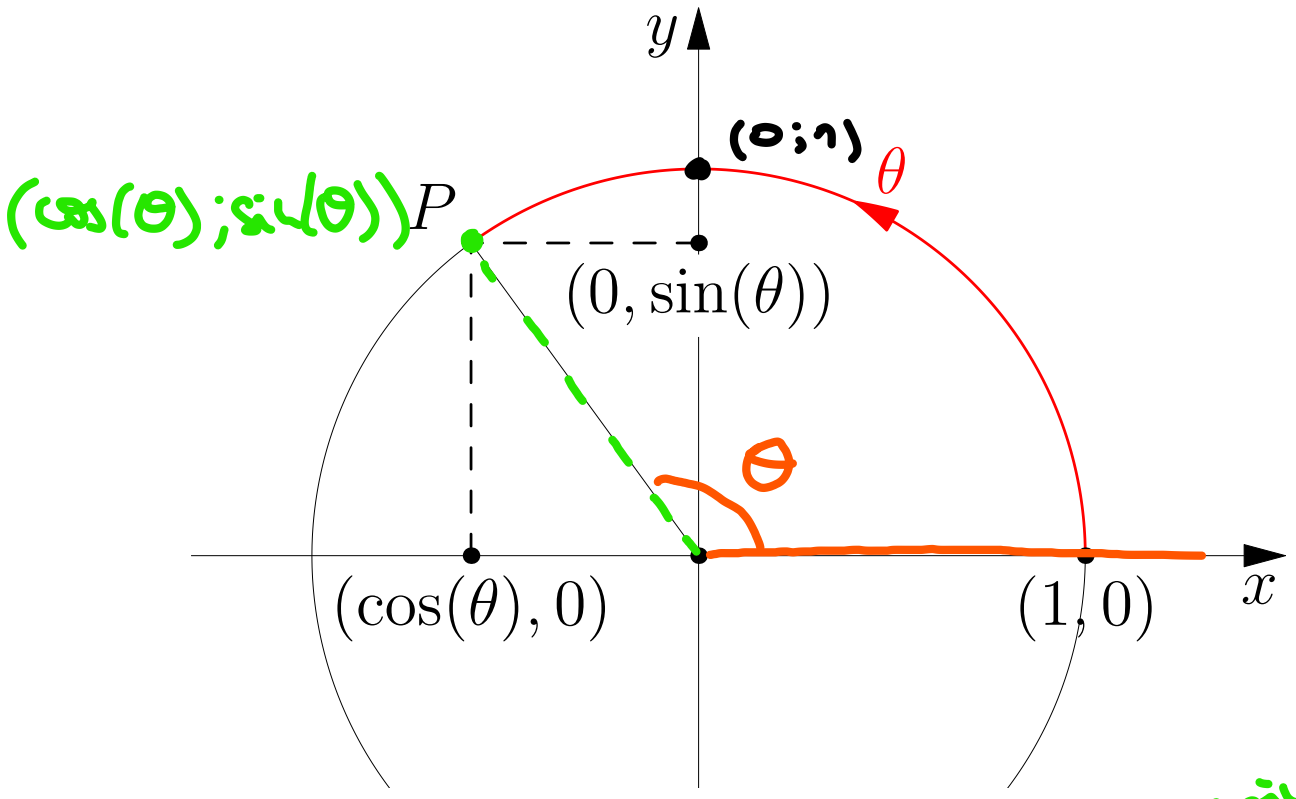
règle de 3.

Contenu de la section

Fonctions trigonométriques

Contenu de la section

Fonctions trigonométriques
- Définitions de sinus, cosinus, ...
- Pente et angle
- Relation fondamentale
- Symétries
- Fonctions périodiques



point image de l'α.

Définition

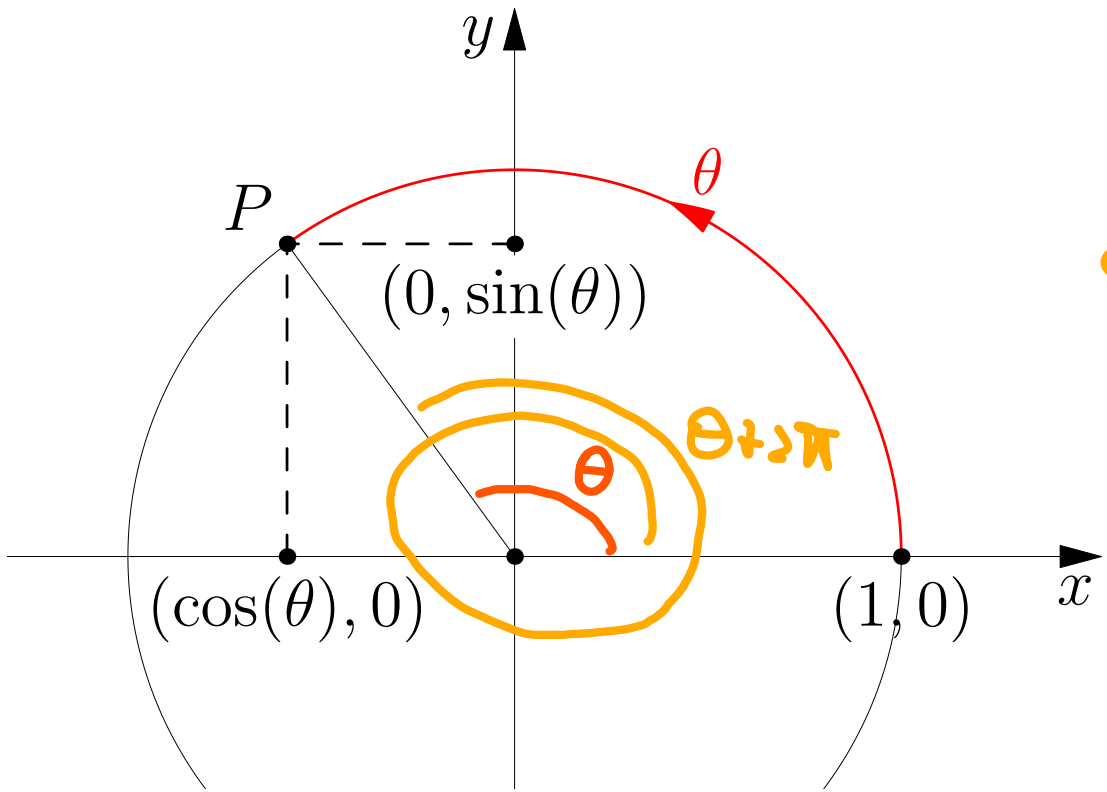
Soit un angle θ en radians. Soit P le point du cercle de centre 0 et de rayon 1 qui fait un angle θ avec l'horizontale. Alors

- $\cos\theta$ est l'abscisse du point P, et
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point P .

] coordonnées du pt P.

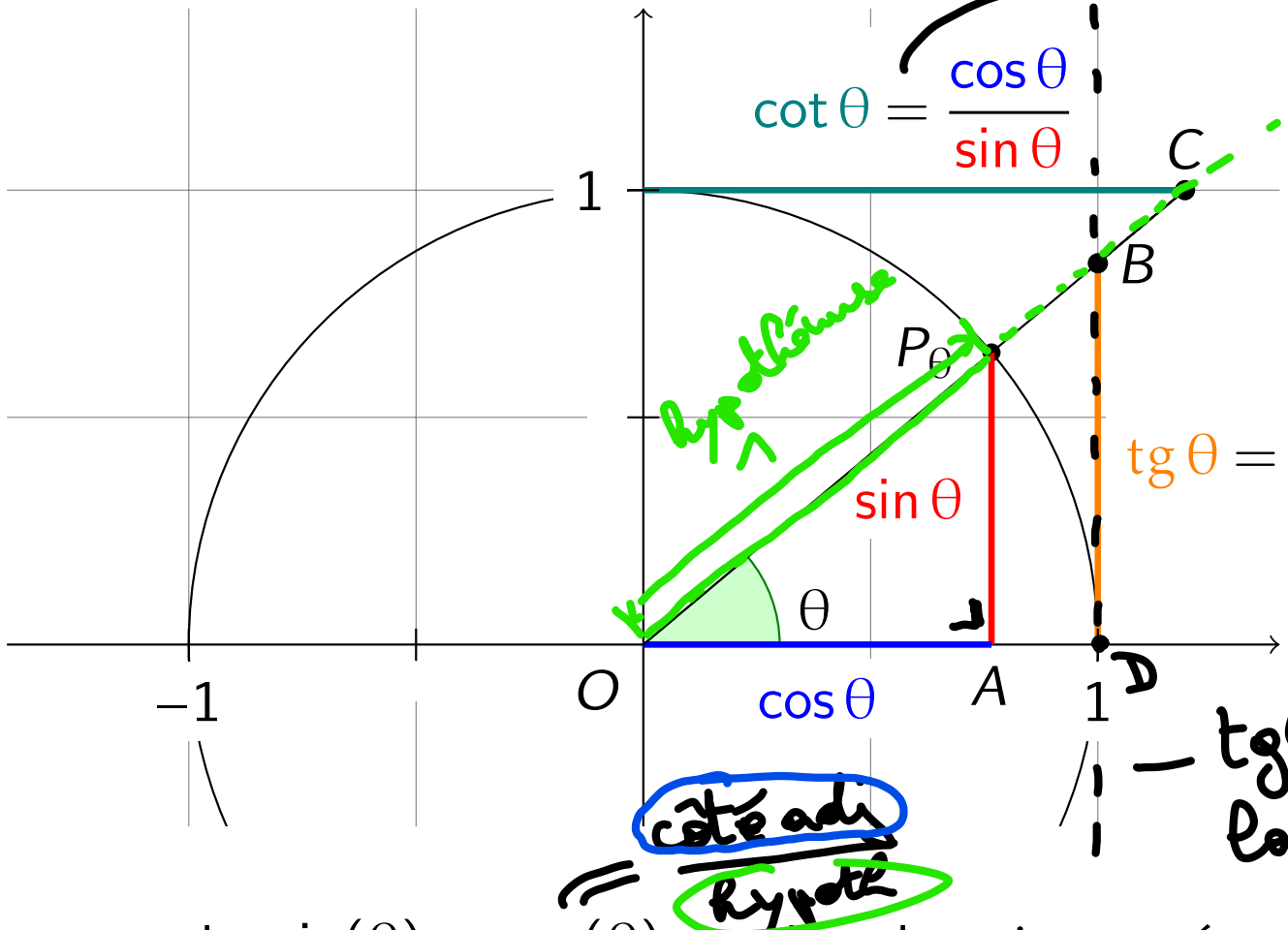
Définition

Un *cercle trigonométrique* est un cercle de rayon 1. Il permet de représenter géométriquement toutes les fonctions trigonométriques.



θ+2π et θ ont un point image sur le cercle trigo pareil pour θ + k · 2π avec k ∈ ℤ

Attention: faire un tour et demi sur le cercle (3π) correspond à la même position finale que faire un demi tour (π). On parlera donc souvent de mesure des angles "à 2π près".



se lit sur la dte $y=1$

ΔOAP_θ et OBD sont semblables

$-\mathrm{tg}(\theta)$ se lit sur la dte $x=1$.

Dans ce cercle, $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ gardent leur interprétation classique: sin est "côté opposé sur hypothénuse", etc...

Autres fonctions trigonométriques importantes :

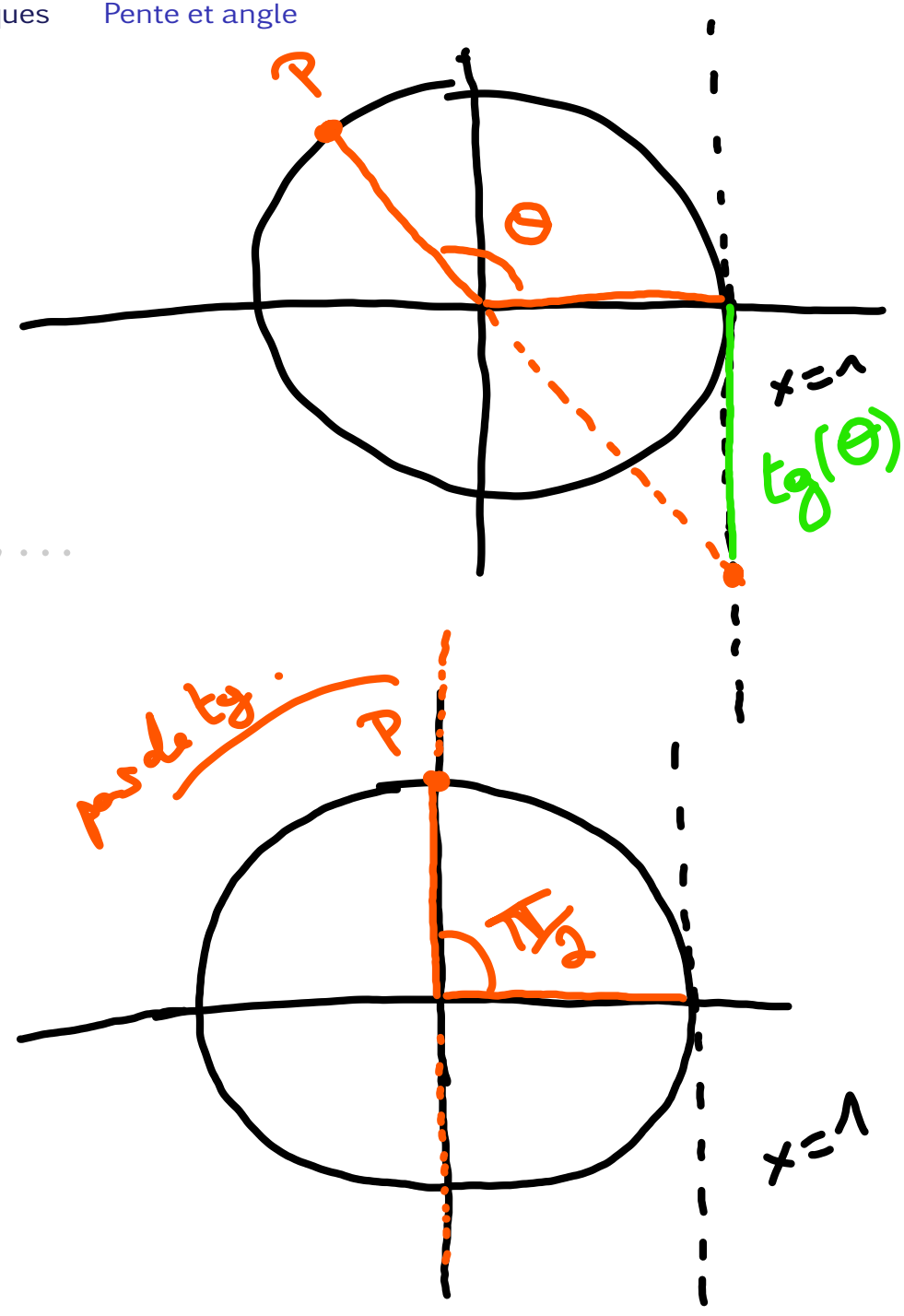
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

CE: $\cos(\theta) \neq 0 \leftrightarrow \theta \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

CE: $\sin(\theta) \neq 0 \leftrightarrow \theta \neq 0 + 2k\pi$ et $\neq \pi + 2k\pi$

Contenu de la section

Fonctions trigonométriques
- Définitions de sinus, cosinus, ...
- Pente et angle
- Relation fondamentale
- Symétries
- Fonctions périodiques



Pente et angle

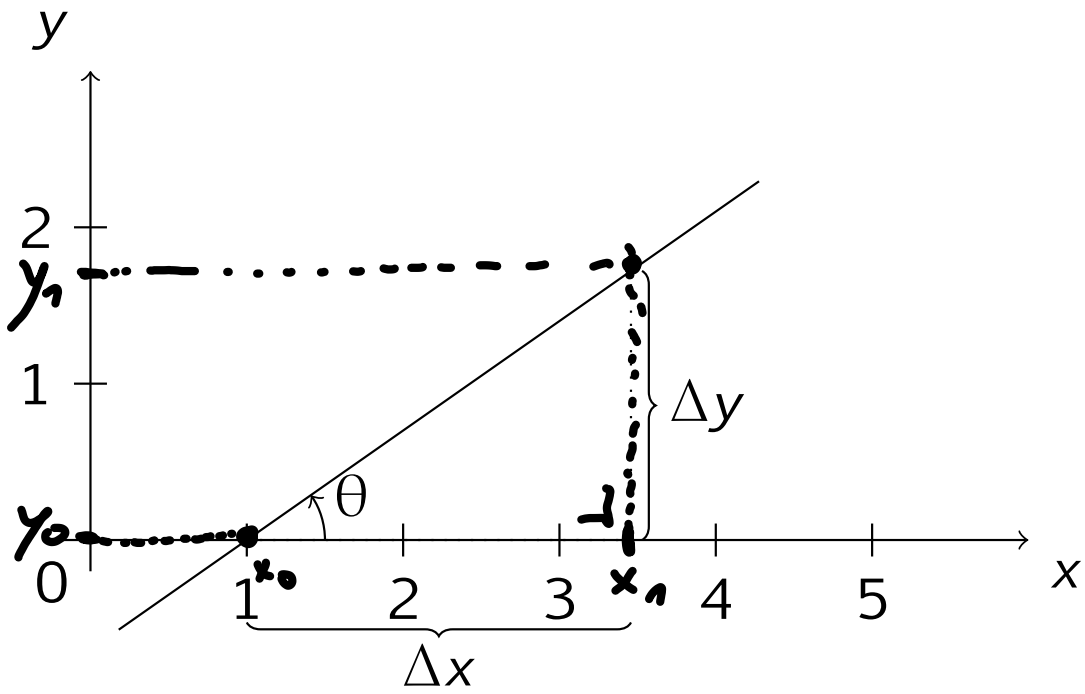
Résultat

Soit un repère cartésien orthonormé. Pour une droite d'équation $y = mx + p$ *formant un angle (orienté)* θ *avec l'horizontale, nous avons*

$$m = \tan\theta$$

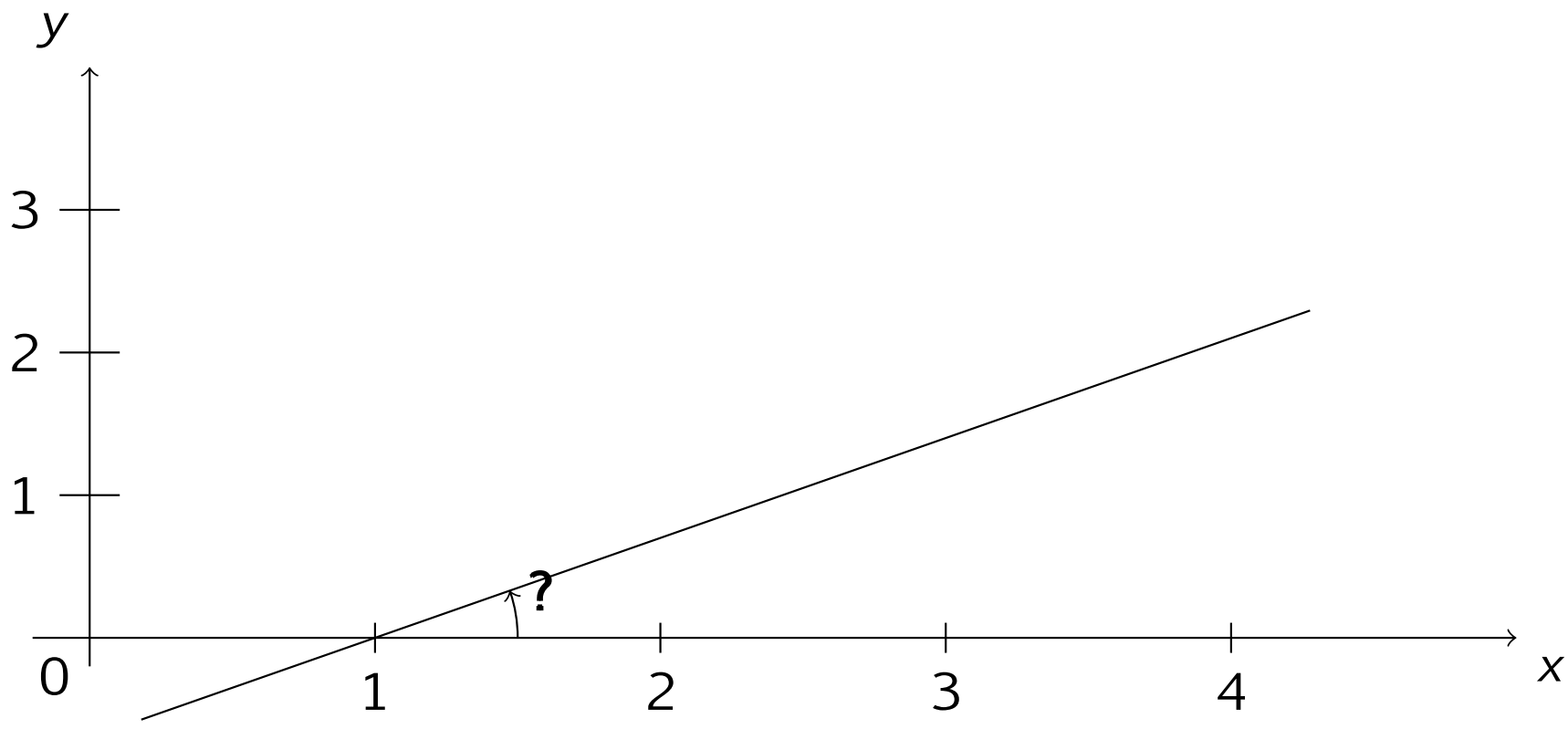
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

où (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points distincts du graphe de f.



Remarque

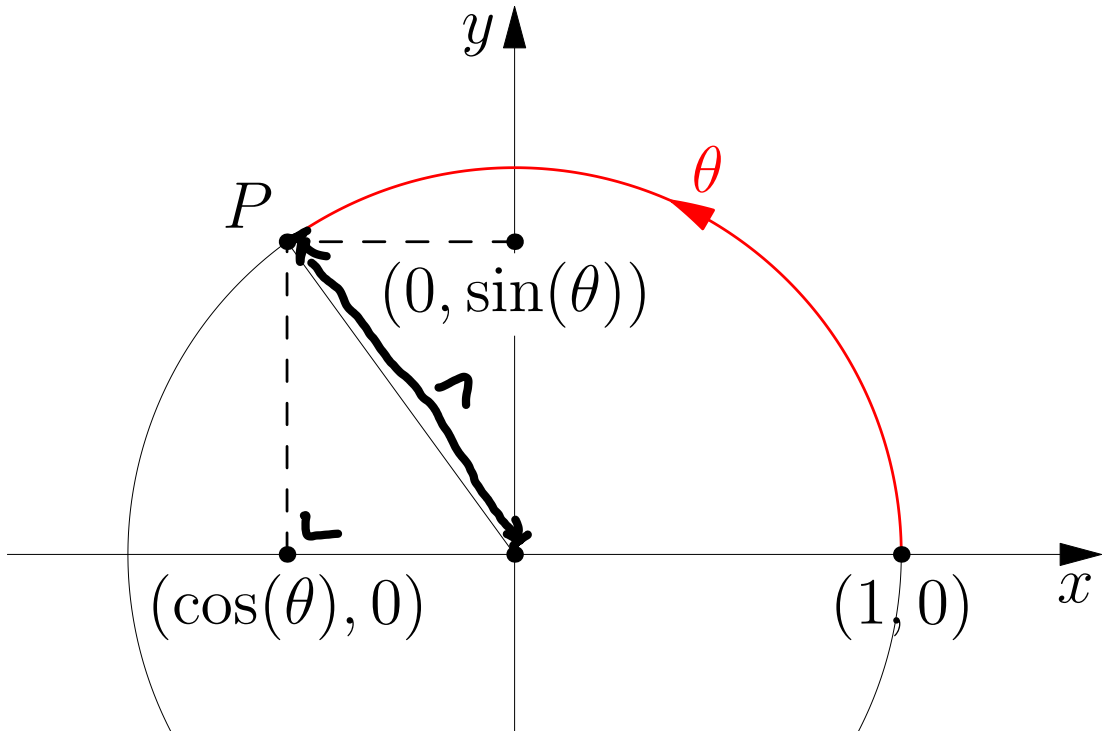
Cette interprétation ne tient plus si les axes ne sont pas gradués à l'identique :



Contenu de la section

Fonctions trigonométriques
- Définitions de sinus, cosinus, ...
- Pente et angle
- Relation fondamentale
- Symétries
- Fonctions périodiques

Relation fondamentale entre cos et sin



Le théorème de Pythagore appliqué dans le cercle trigonométrique implique l'importante relation $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1^2$. On l'écrira plus souvent sous la forme:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Angles remarquables

Voici quelques valeurs importantes des fonctions sinus et cosinus :

angle	sin		cos	tan	cot
0	$\sqrt{0}/2$	$= 0$	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$= 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$		$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$= 1$	0	$\nexists$	0

(2.1)

Pour ces valeurs particulières: on obtient une des deux (cos ou sin) en lisant sur le cercle trigonométrique, et l'autre à partir de la relation fondamentale.

Et ensuite on calcule tan par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Contenu de la section

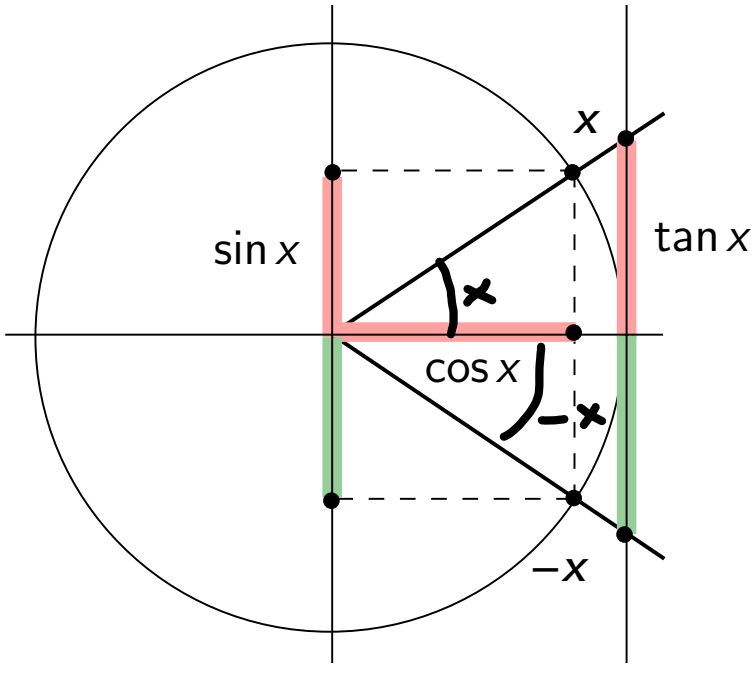
Fonctions trigonométriques
- Définitions de sinus, cosinus, ...
- Pente et angle
- Relation fondamentale
- Symétries
- Fonctions périodiques

Principe

Nous allons voir dans les prochains slides comment obtenir de très nombreuses relations sur les fonctions sin et cos à partir du cercle trigonométrique.

Ces relations correspondent à des symétries de ces fonctions.

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



fct impaire $f(-x) = -f(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

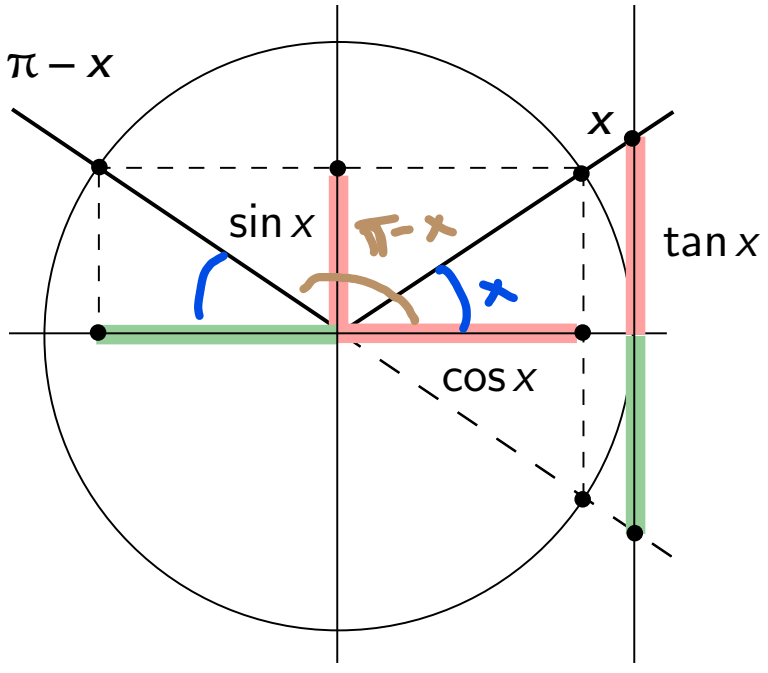
$\cos(-x) = \cos(x)$ — fct paire $f(-x) = f(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

$\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$

Si vous ne vous souvenez plus de ces relations, il faut savoir les retrouver en lisant le cercle trigonométrique. Ces formules montrent en particulier que sin et tan sont des fonctions impaires sur leur domaine de définition et cos est paire.

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

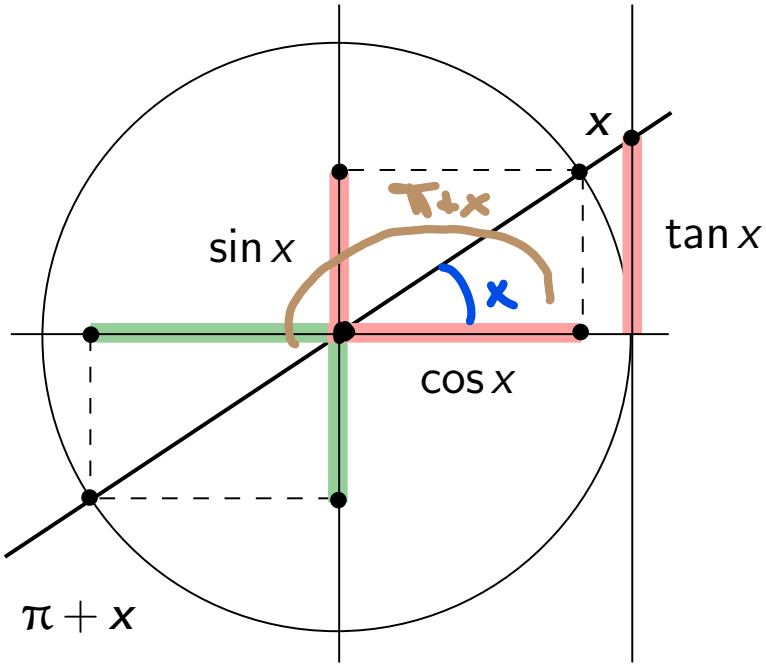
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Pour lire $\pi - x$: on trace d'abord $-x$, puis ajouter π revient à faire un demi-tour (dans le sens horaire). Et ensuite on lit la valeur des fonctions trigonométriques sur les axes.

Symétrie centrale par rapport à l'origine

Faire une symétrie par rapport à l'origine revient à faire un demi-tour, donc à rajouter π rad.



$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

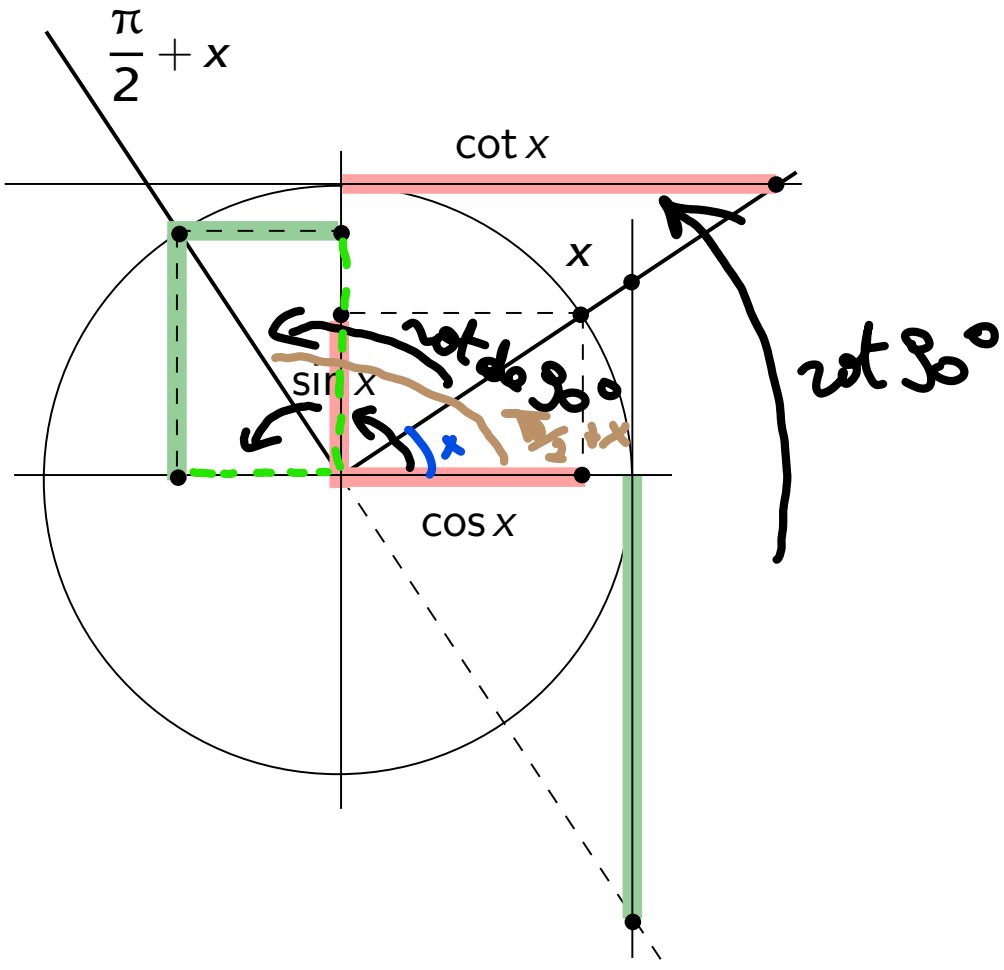
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Vous devez savoir retrouver toutes ces relations à l'aide du cercle trigonométrique, en faisant un schéma comme ceux-ci (pensez à dessiner un angle "générique", qui ne soit pas proche de 90°).

Angles décalés de 90° (rotation de 90°)

Décaler un angle de 90° degrés dans le sens positif revient à rajouter 90° donc $\frac{\pi}{2}$ rad.

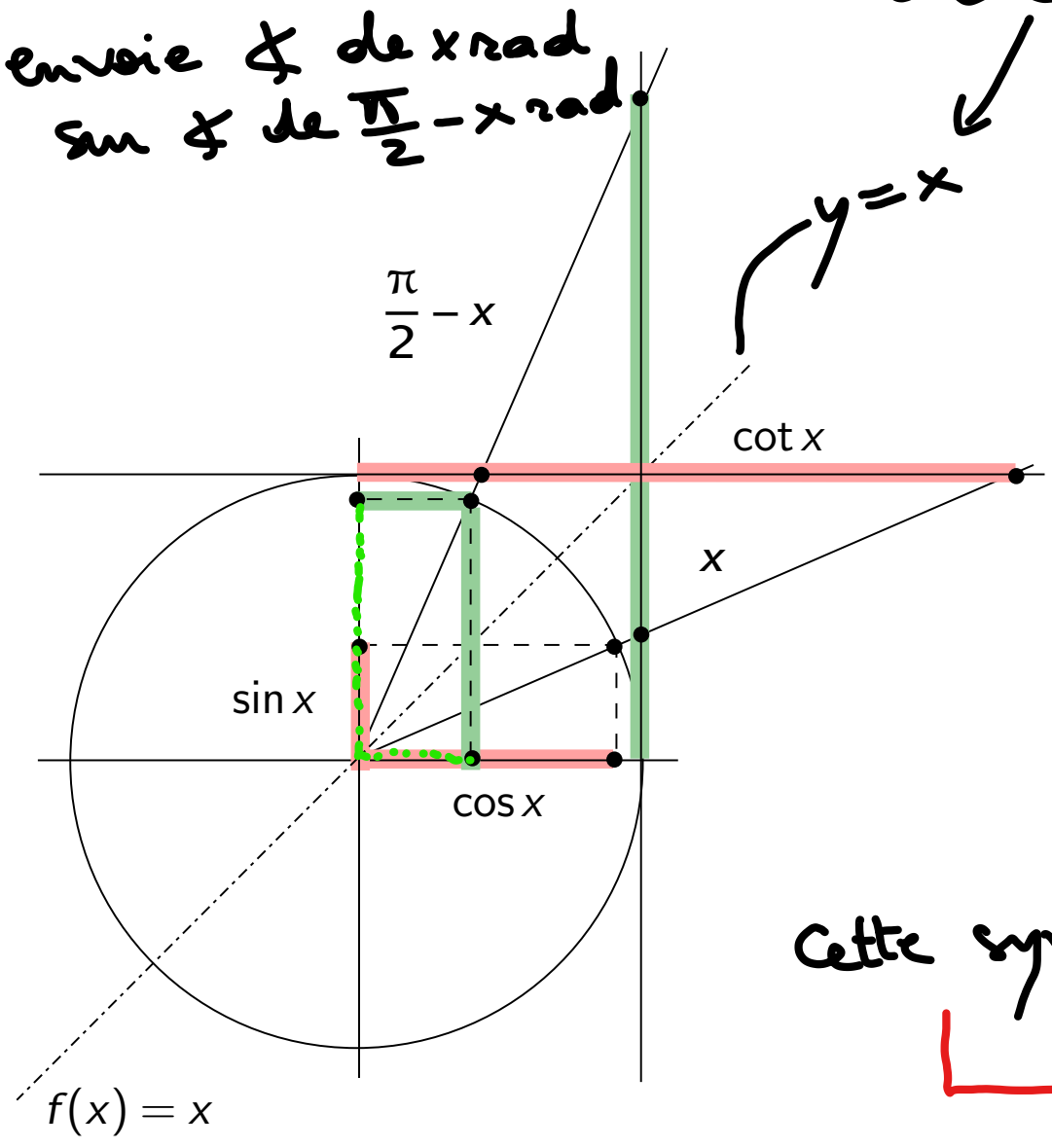


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$$

Symétrie par rapport à la première bissectrice



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot(x)$$

Cette symétrie envoie



Contenu de la section

Fonctions trigonométriques
- Définitions de sinus, cosinus, ...
- Pente et angle
- Relation fondamentale
- Symétries
- Fonctions périodiques

Fonctions périodiques

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$ un nombre réel. On dit que f est périodique de période T si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + T) = f(x).$$

On appelle période de f le plus petit nombre T vérifiant ça.

Fonctions périodiques

$\cos(\theta + k2\pi) = \cos(\theta)$ — période.
$\forall k \in \mathbb{Z}$

Exemple

- sin et cos sont 2π-périodiques. (Rajouter 2π c'est faire un tour complet de cercle trigonométrique).
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est alors aussi 2π-périodique. Mais: tan est en fait π-périodique, car:

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

La période de tan est donc π (le demi-tour).

↳ $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Domaine de définition des fonctions sin, cos et tan

Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ entier: elles sont définies sur $[0, 2\pi]$ grâce au cercle trigonométrique et sont 2π périodique, donc sont définies sur

La fonction $\tan(x)$ est définie comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est donc définie uniquement lorsque $\cos(x) \neq 0$. Or, on voit sur le cercle trigonométrique que

$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction tan est donc définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Et comme elle est π-périodique elle est donc définie sur

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Contenu de la section

Formules de trigonométrie

Il existe des formules qui permettent d'exprimer les sinus et cosinus d'une somme d'angles en fonction des sinus et cosinus des angles de départ:

Résultat

Pour tous angles A et B (en radians):

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

Vous devez connaître ces formules qui seront exigibles à l'examen, et dont on se servira souvent en cours. (Attention aux signes qui changent entre $\cos(A+B)$ et $\sin(A+B)$).

Utilisation des formules de trigonométrie

Ces formules sont très utiles pour exprimer des expression plus compliquées comme $\cos(3x)$, $\sin(5x)$, etc...en fonction uniquement de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exemple

- Pour tout angle x:
  $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
- Pour tout angle x: $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$.
- Pour tout angle x:

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x+x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos(x)^2 + \left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)\sin(x)\\ &= 3\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3\end{aligned}$$

En utilisant maintenant $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ il reste:

$$\sin(3x) = 3\sin(x)(1-\sin(x)^2) - \sin(x)^3 = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3.$$

On peut montrer de la même manière plein de formules différentes:

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2}$$

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$$

$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Pour l'examen, seules les formules donnant $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ et $\tan(A+B)$ seront exigées. Il sera aussi demandé d'exprimer des nombres de la forme $\sin(7x)$, $\cos(3x)$, etc... en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ comme ci-dessus.