Géométrie Analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: systèmes de coordonnées et équations dans le plan

(Syllabus Chapitre V et Chapitre VII jusqu'à la partie 3.)

Contenu de la section

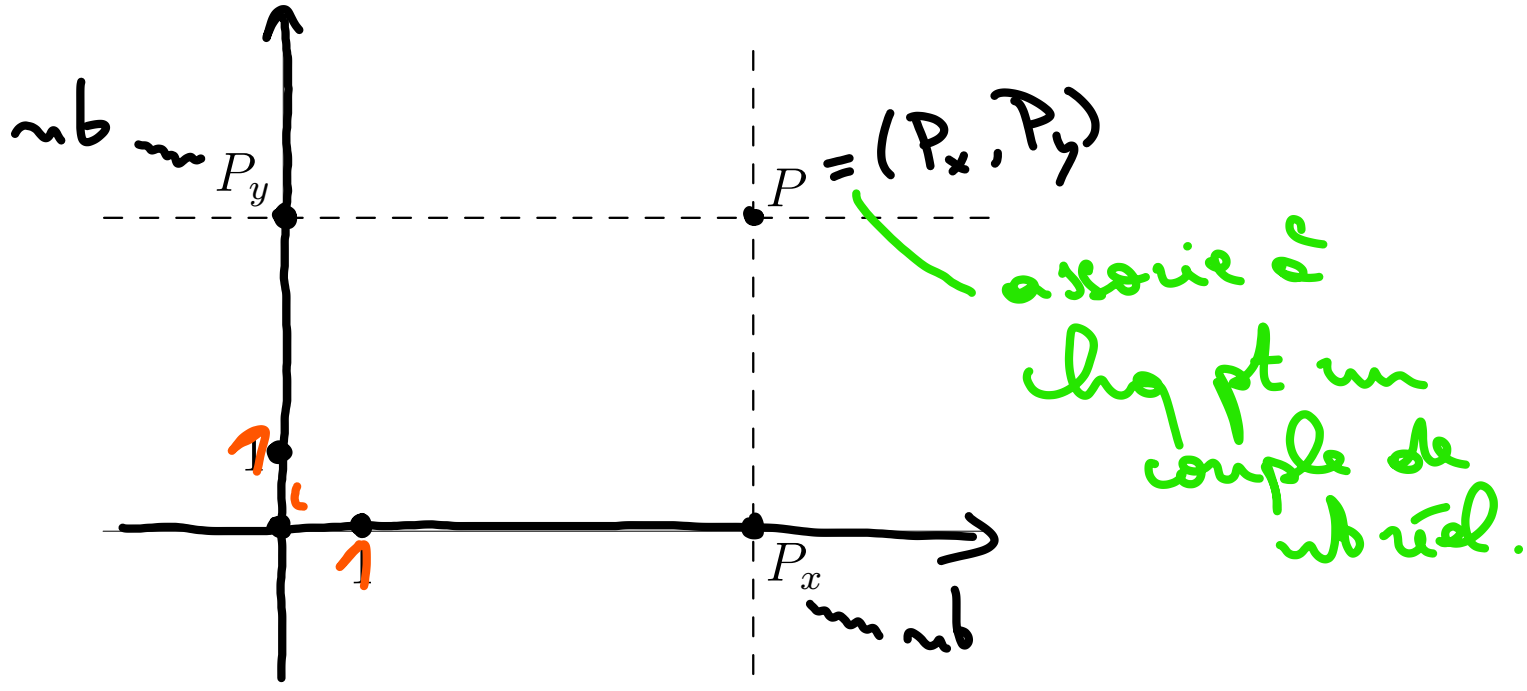
Géométrie analytique

Géométrie analytique

La géométrie analytique est une manière d'aborder des problèmes de géométrie en faisant des calculs. On utilise pour ça un ou plusieurs systèmes de coordonnées.

On donne quelques exemples dans le plan:

Coordonnées cartésiennes dans le plan



Définition

Un repère cartésien est la donnée de deux axes sécants, et d'une unité sur chaque axe. L'intersection des axes est appelée l'origine. Les coordonnées cartésiennes d'un point P du plan sont alors obtenues en projetant ce point sur chacun des axes, et en repérant la projection par rapport à l'unité.

Un système de coordonnées donne une équivalence entre

- les points du plan et
- les couples de nombres réels de la forme (x, y), où x et y décrivent tous les nombres réels. Nous noterons $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de la forme (x, y) lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$.
  Nous allons donc repérer les points du plan par leurs coordonnées (x, y) où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

Dans l'espace, on représente des points par trois coordonnées: (x, y, z), respectivement abscisse et ordonnée dans le plan horizontal et hauteur. On notera de même $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points de la forme (x, y, z) lorsque x, y et z décrivent $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points de l'espace.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Contenu de la section

Géométrie analytique
- Points et vecteurs
- Opérations de base
- Norme d'un vecteur
- Systèmes de coordonnées

Points de $\mathbb{R}^n$

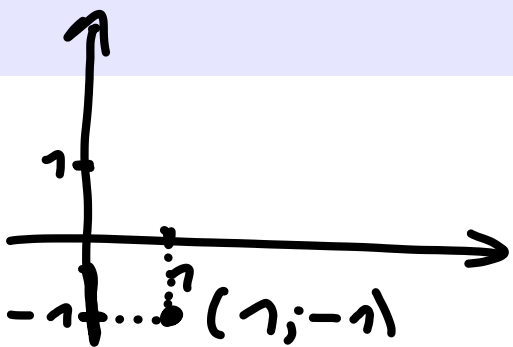
Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, peut être vu comme un *point*, et il s'écrit alors comme ses *coordonnées*, qui sont n nombres. Nous les notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Lorsque $n = 2$: les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan dont l'abcisse vaut 1 et l'ordonnée vaut -1.



Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

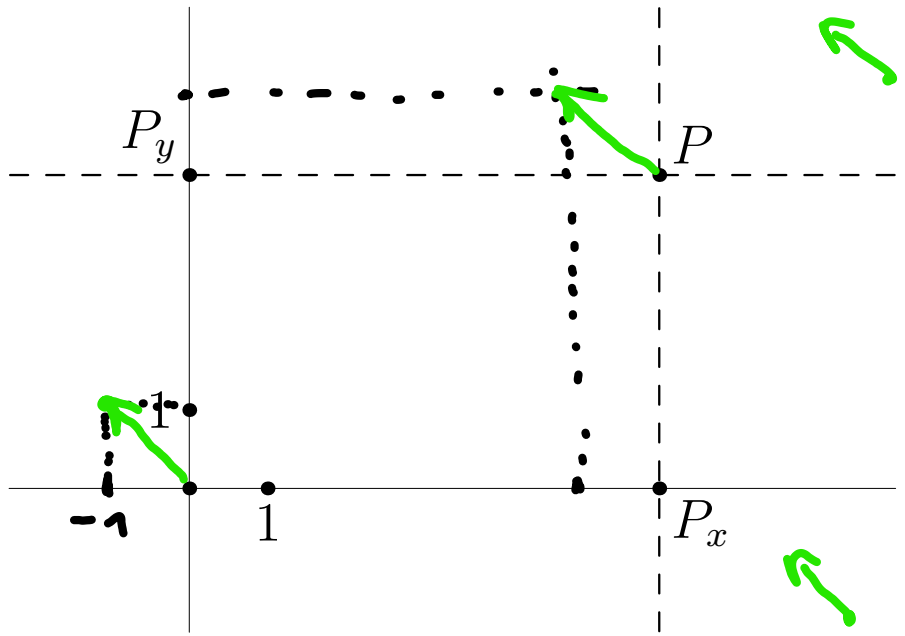
On peut aussi voir un élément de $\mathbb{R}^n$ comme un déplacement dans la direction indiquée (une translation)ou encore comme une flèche entre deux points. C'est ce qu'on appelle un vecteur:

Définition

Un vecteur est un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, ...$, dont les coordonnées sont maintenant appelées les *composantes* du vecteur.

Exemple

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction "Nord-Ouest" sur le plan.



Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive entre point et vecteur est:

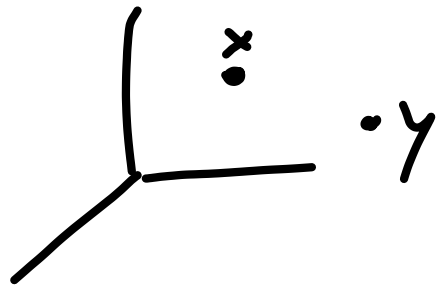
- que le point représente un état, une position
- tandis que le vecteur représente un déplacement, dans une direction donnée, entre deux points.

d'une longueur donnée, dans un sens donné.

Remarque

Mais les deux sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$! Par exemple si $n = 2$: pour un point, (x, y) représente sa position dans le plan. Alors que pour un vecteur, (x, y) représente un décalage de x unités sur l'axe horizontal et de y sur l'axe vertical.

Composantes d'un vecteur



Un vecteur se représentera sous la forme d'une flèche. Il est donné sans point de départ: c'est une direction.
Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, on peut en revanche calculer le vecteur qui représente le déplacement de x à y. Ce vecteur se note généralement $\overrightarrow{xy}$. ($\overrightarrow{yx}$ = déplacement de y à x.)

Ses composantes sont données en prenant la différence entre les coordonnées de **y** (le point d'arrivée) et celles de **x** (le point de départ).Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$ ou $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

$\overrightarrow{yx} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}$

Contenu de la section

Géométrie analytique
- Points et vecteurs
- Opérations de base
- Norme d'un vecteur
- Systèmes de coordonnées

Opérations sur les vecteurs

Si $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut sommer deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel.

Tout se fait coordonnée par coordonnée:

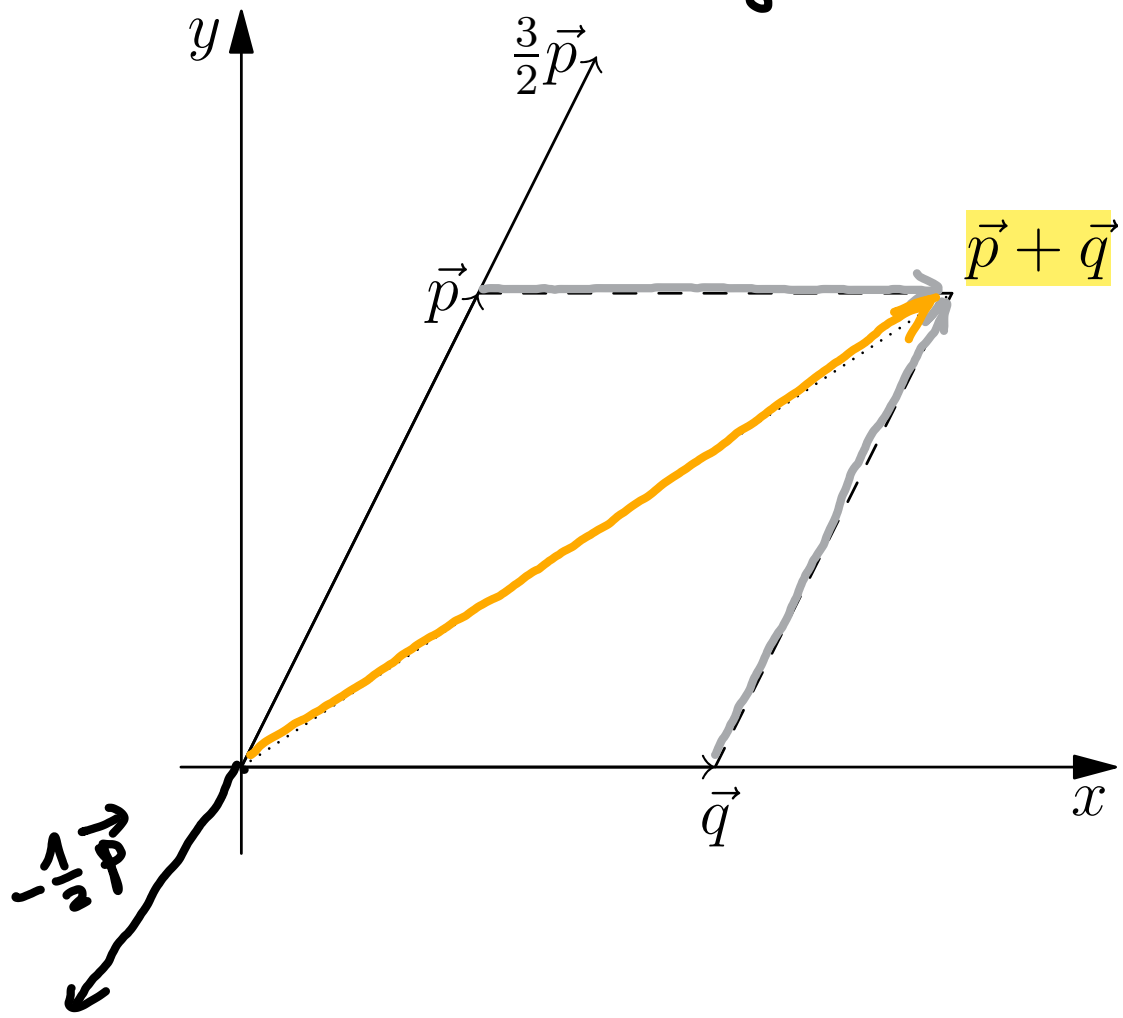
$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = (x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$

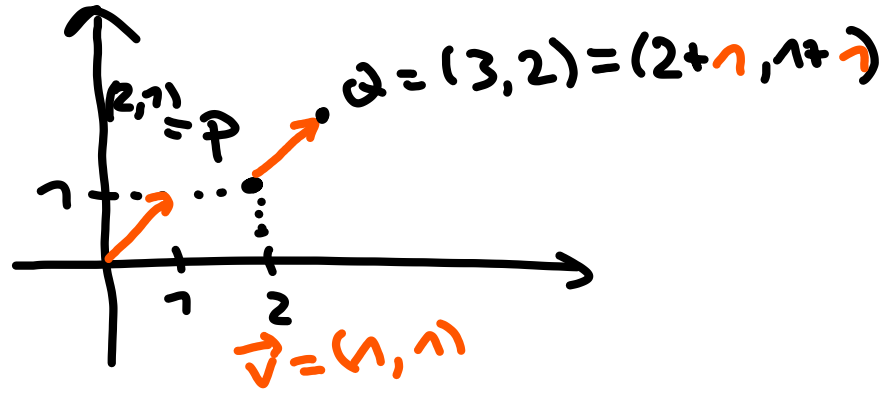
$$\lambda \overrightarrow{x} = \lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

- la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme ;
- la multiplication par un réel multiplie la longueur.

change de sens si le nb est < 0.

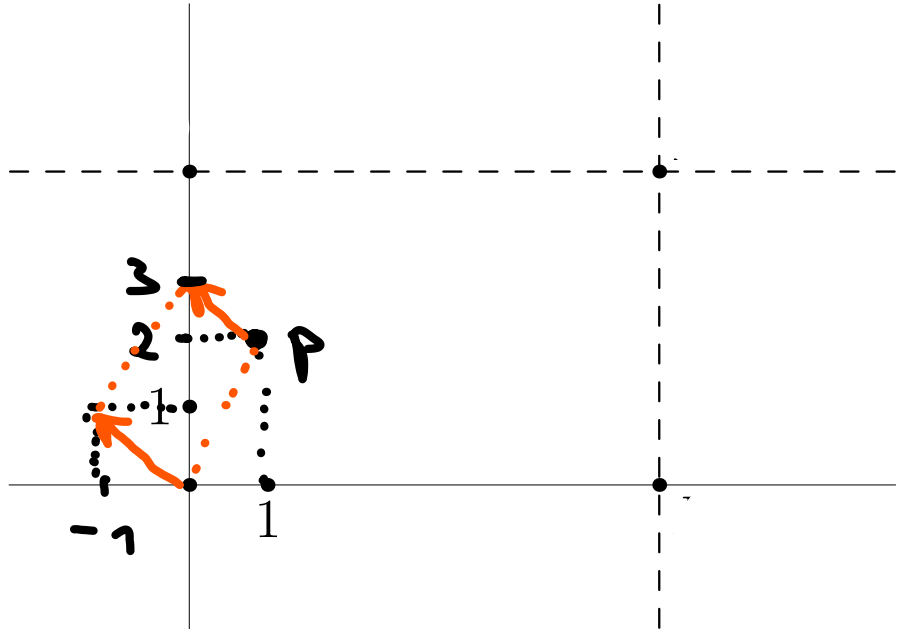


Combiner points et vecteurs



- la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente le point obtenu en se déplaçant dans la direction du vecteur à partir de ce point : le résultat est un point ;
- la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur.

Tout ceci se calcule en coordonnées.



Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1, 2)$ comme un point, et $\overrightarrow{w} = (-1, 1)$ comme un vecteur (donnant la direction "Nord-Ouest"), alors leur somme $\mathbf{p} + \overrightarrow{w} = (1, 2) + (-1, 1) = (0, 3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\overrightarrow{w}$.

Vecteur nul

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, l'élément particulier $(0,0,\ldots,0)$ se note $\overrightarrow{0}$ et est appelé *vecteur nul*.

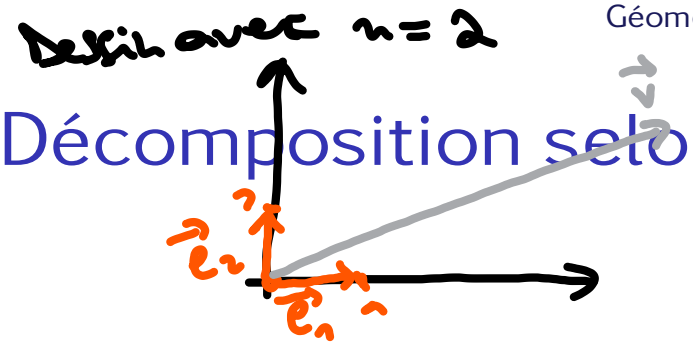
Il représente un déplacement ... nul (donc aucun déplacement).

Résultat

Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, *nous avons*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.$$

$\overrightarrow{0}$ est le neutre de l'addition vectorielle.



Décomposition selon les axes de coordonnées

$\vec{v}$ se décompose en un certain nb de dépl $\vec{e_1}$ suivi d'un certain nb de dépl $\vec{e_2}$.

Regardons le cas $n = 3$. Nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire:

$$\overrightarrow{v} = (v_1,0,0) + (0,v_2,0) + (0,0,v_3) = v_1\,\overrightarrow{e_1} + v_2\,\overrightarrow{e_2} + v_3\,\overrightarrow{e_3}.$$

$v_1(1,0,0)$

Attention, ici $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont eux-mêmes des vecteurs. Alors que v_1, v_2 et v_3 sont des nombres (encore appelés des "scalaires"). Il ne faut pas confondre les deux.

Centre de gravité

Le milieu d'un segment d'un point $\mathbf{a}$ jusqu'à un $\mathbf{b}$ est donné par :

$$\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

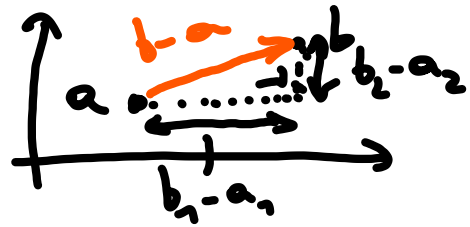
Le *milieu* ou *centre de gravité* des points $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ est donné par:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Chaque coordonnée du centre de gravité $\mathbf{g}$ est la moyenne des coordonnées des a_i.

Contenu de la section

Géométrie analytique
- Points et vecteurs
- Opérations de base
- Norme d'un vecteur
- Systèmes de coordonnées



Résultat (Rappel – Théorème de Pythagore)

Dans le plan, la longueur du segment de $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *à* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *est donnée par* $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Définition

En général, on appelle *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ la quantité:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Exemple

La norme du vecteur $(4, 2, 4)$ est $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Remarque

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la norme du vecteur $\overrightarrow{ab}$ mesure la distance entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Résultat

La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;
- $\left\|\lambda\overrightarrow{a}\right\| = |\lambda|\left\|\overrightarrow{a}\right\|$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{a}\right\| + \left\|\overrightarrow{b}\right\|$ *(inégalité triangulaire).*

La preuve est omise et on renvoie au syllabus.

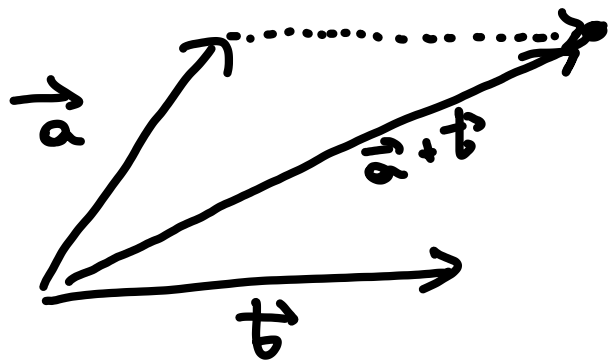
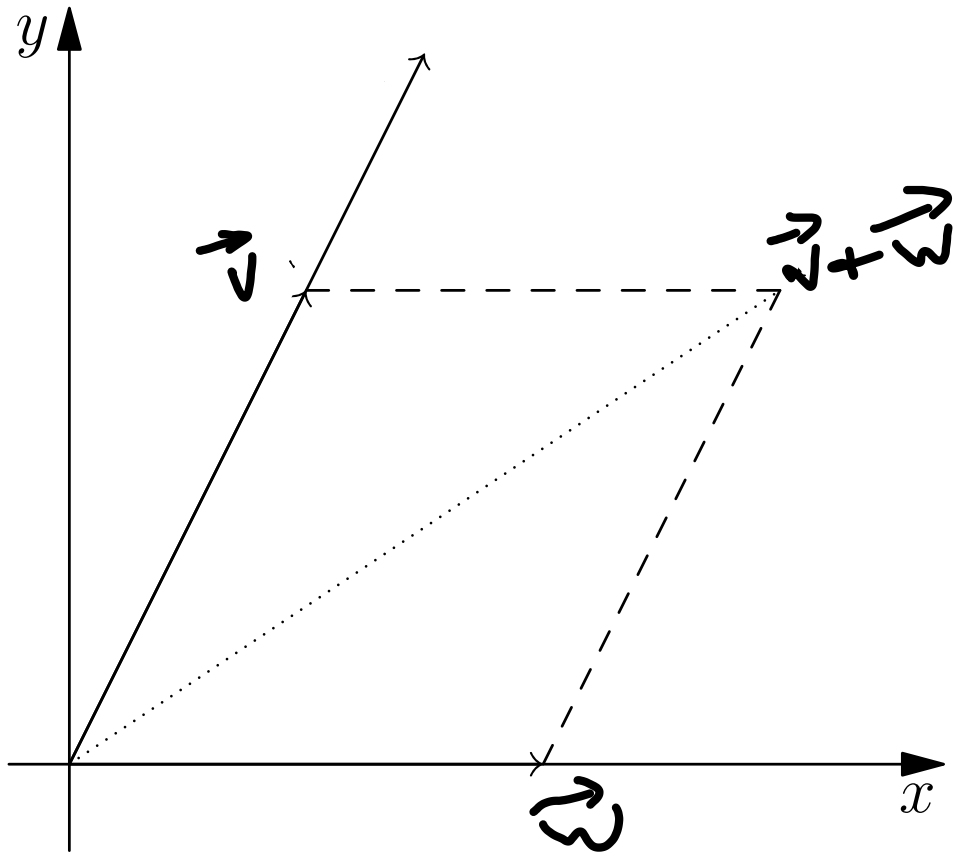


Illustration de l'inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire dit que, pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

Ca se voit géométriquement:



Contenu de la section

Géométrie analytique
- Points et vecteurs
- Opérations de base
- Norme d'un vecteur
- Systèmes de coordonnées

On connait le système de coordonnées cartésiennes du plan, c'est la fonction

$$\begin{cases} \text{plan} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad \mathbf{p} \mapsto (x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p})) \end{cases}$$

qui à tout point associe son abscisse et sa coordonnée.

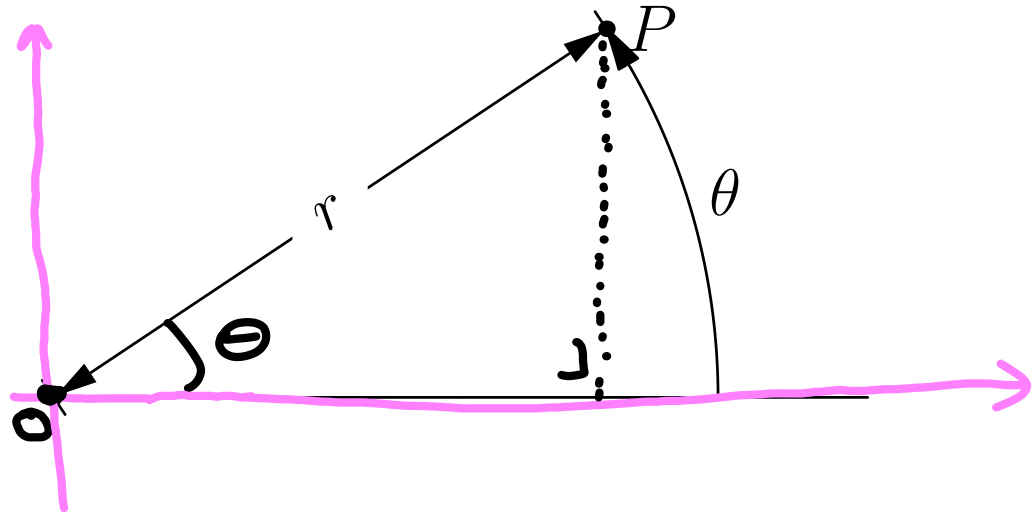
D'autres systèmes de coordonnées existent. Toute fonction qui permet de représenter de manière unique des points du plan par un couple de nombres réels peut servir de système de coordonnées. Même chose pour $\mathbb{R}^3$ avec trois (triplet) nombres réels.

Nous allons décrire en détail un autre système de coordonnées dans le plan, appelées coordonnées polaires.

Coordonnées polaires.

Pour définir des *coordonnées polaires* du plan, on choisit

- une origine **o** (un point) et
- une demi-droite issue de ce point.



Un point P est alors repéré dans le plan par deux coordonnées, souvent notées (r, θ), où

- r correspond à la distance entre **o** et P, et
- θ correspond à l'angle orienté entre la demi-droite choisie et la demi-droite issue de **o** passant par P.

On choisit généralement $\theta \in [0; 2\pi[$.

Coord polaire : $\begin{cases} \text{plan} \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\\ P \longmapsto (r(P), \theta(P)) \end{cases}$

Si P possède des coordonnées cartésiennes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ), elles sont reliées par les relations :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Remarque

Il n'est pas possible d'écrire aisément θ en terme de x et y, par contre par le théorème de Pythagore on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2_{\{(0;0)\}}$ $\xleftarrow{\text{cartésien}}$ $\text{plan} \setminus \{O\}$ $\xrightarrow{\text{polaire}}$ $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[$

(x, y) $\longleftarrow$ P $\longmapsto$ (r, θ)

Contenu de la section

équations dans le plan

Contenu de la section

équations dans le plan
Droites
équations de cercles

équations d'objets

Rappel: chaque point du plan a deux coordonnées cartésiennes. On va voir qu'on peut dessiner des ensembles de points dans le plan dont les coordonnées vérifient une équation de deux variables.

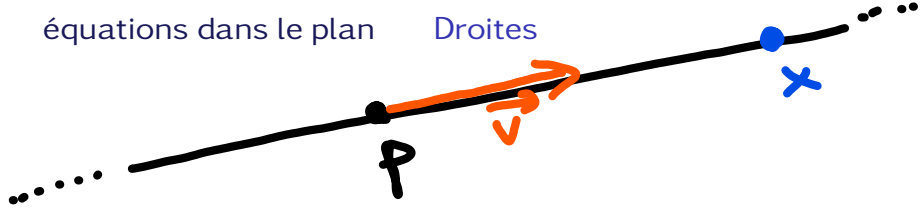
équation d'une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

c'est-à-dire que les points (x, y) vérifiant l'équation ci-dessus sont exactement les points de la droite. Les constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ permettent de décrire la droite (position, direction).

Ceci est une équation à deux inconnues, elle admet donc en général un nombre infini de solutions! Voici pourquoi l'ensemble des solutions est une droite et pas simplement un point.



Justification

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ (un point) et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (un vecteur). La droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $\mathbf{p}$ et dirigée selon la direction $\vec{v}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{v} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

C'est ce qu'on appelle les équations paramétriques de la droite.

On écrit $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sur chaque coordonnée on obtient donc:

éq paramétriques coord.

$$x = p_1 + tv_1 \quad \text{et} \quad y = p_2 + tv_2.$$

donc

$$x - p_1 = tv_1 \quad \text{et} \quad y - p_2 = tv_2.$$

On a alors

$$(x - p_1)v_2 = tv_1v_2 = (y - p_2)v_1$$

on isole t.

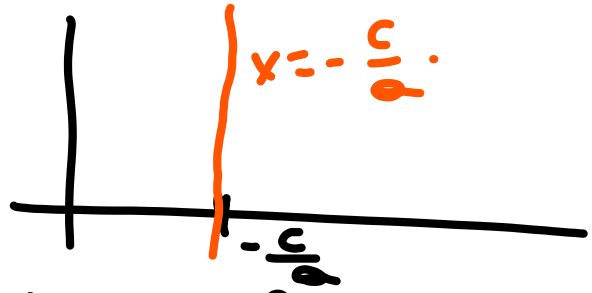
distributivité et regroupement à gauche

éq cartésienne

c'est-à-dire, en changeant de notations

$$ax + by + c = 0$$

(on a posé: $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = p_2v_1 - p_1v_2$).



Remarquons que la droite d'équation $ax + by + c = 0$

- est verticale si $b = 0$, $a \neq 0$: son équation est alors $x = -\frac{c}{a}$.
- est horizontale si $a = 0$, $b \neq 0$: son équation est alors $y = -\frac{c}{b}$.
- passe par l'origine si $c = 0$. Car si $c = 0$, $(0, 0)$ vérifie toujours l'équation.
- est identique à la droite d'équation $kax + kby + kc = 0$ pour n'importe quelle constante $k \neq 0$.

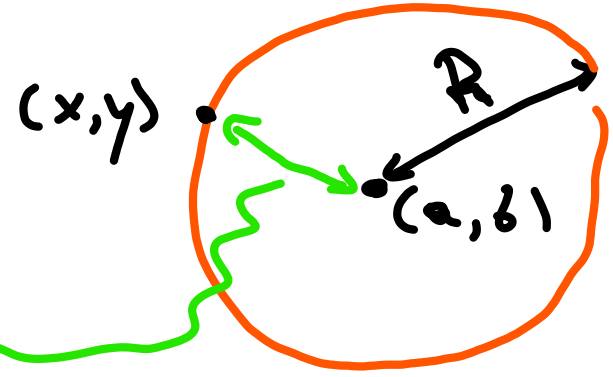
Lorsque $b \neq 0$ (droite non-verticale), on peut ré-écrire l'équation en isolant y :

$$y = mx + p$$

Contenu de la section

équations dans le plan
Droites
équations de cercles

équations de cercles



Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $R > 0$.
Le cercle de centre (a,b) et de rayon R est l'ensemble des points à distance R du point (a,b). Il a donc pour équation :

$$\|(x,y)-(a,b)\| = R$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

ou encore

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

Exemple

L'équation:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

représente un cercle de centre $(3, 1)$ et de rayon 1.

Pour voir ça, on réécrit:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0 \iff (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$$

qui est équivalente à :

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

équation d'un cercle en coordonnées polaires

Le choix d'un autre système de coordonnées peut parfois considérablement simplifier les équations des objets étudiés.

Exemple

origine

On considère l'équation d'un cercle de centre 0 et de rayon R.

- En coordonnées cartésiennes: $x^2 + y^2 = R^2$
- En coordonnées polaires: $r = R$