Cours préc : • pt / vecteur comp / coord
• + de vect, mult par nb
• longueur / distance
• éq de dte dans le plan.

# Géométrie Analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: produits scalaire et vectoriel

(Syllabus Chapitre VII parties 4 et 5 et Chapitre VIII partie 1.)

# Contenu de la section

## Produit scalaire

# Contenu de la section

Produit scalaire
- Définition
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Application aux équations de droites
- Lois trigonométriques

# Rappel

Dans tout ce cours on rappelle que $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des points représentés par $n$ coordonnées dans $\mathbb{R}$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Si $n = 2$ ceci décrit les points ou vecteurs du plan, si $n = 3$ les points ou vecteurs de l'espace.

⚠ Ne pas confondre avec la multiplication d'un vect par un nb réel scalaire.

## Définition

Le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

C'est donc un nombre réel (un "scalaire").

↑ résultat.

## Exemple

$$\langle (2,1), (2,5) \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 9$$

Notation : $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est parfois noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

# Produit scalaire et norme

Le **produit scalaire** est associé à la **norme** par la relation suivante:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

En particulier: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$. ← propriété de $\|\cdot\|$.

**Rappel:** La norme d'un vecteur correspond à sa "longueur" d'après le théorème de Pythagore.

## Exemple

(pour $n = 2$) Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Et indépendamment,

$$\sqrt{\langle (a, b), (a, b) \rangle} = \sqrt{a \cdot a + b \cdot b} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

# Propriétés du produit scalaire

## Résultat

*Pour tous* **vecteurs** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ *et* **scalaires** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\langle (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}), \vec{c} \rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \mu\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ *(linéaire à gauche)*
2. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ *(symétrique)*
3. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ *et de plus,* $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ *(défini positif).*

Les deux premières propriétés montrent qu'il y a également linéarité à droite ; on dit alors que le produit scalaire est

# Contenu de la section

Produit scalaire
- Définition
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Application aux équations de droites
- Lois trigonométriques

# Inégalité de Cauchy-Schwarz

## Résultat (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

*Pour tous* ***vecteurs*** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\left|\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle\right| \leq \left\|\overrightarrow{a}\right\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|.$$

C'est un résultat fondamental , dont la preuve sera exigible à l'examen.

Il dit que le produit scalaire entre deux vecteurs est au plus égal (en valeur absolue) au produit des deux normes.

Obj: $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$.

## Preuve

*Pour tout nombre réel t, on calcule la quantité* $\langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle$. *Elle est positive par définition du produit scalaire. Nous pouvons la ré-écrire grâce à la bilinéarité sous la forme :*

$$\begin{aligned}\langle (\vec{a} + t\vec{b}), (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle &= \langle \vec{a}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle + t\langle \vec{b}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \|\vec{b}\|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

*Mais cette expression est un polynôme du second degré. Si elle est positive pour toute valeur de t c'est que son discriminant est négatif:*

$$\left(2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right)^2 - 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

*qui donne alors:*

$$\left|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\right| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

*qui est l'inégalité annoncée.*

# Une autre manière de calculer le produit scalaire

## Résultat

*Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\| \cos(\theta)$$

*où $\theta$ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (qu'on imagine basés au même point!).*

La preuve n'est pas à connaître. Si vous êtes intéressé-e-s, voir le syllabus, c'est une application des formules de trigonométrie.

$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, donc ce résultat implique l'inég de Cauchy-Schwarz.

De ce résultat on déduit une propriété fondamentale du produit scalaire:

## Corollaire

*Le produit scalaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ s'annule si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux (c'est-à-dire s'ils font un angle de $\frac{\pi}{2}$) ou si l'un des deux est nul.*

## Preuve

*On utilise le résultat précédent:*

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\| \cos(\theta)$$

*Si les vecteurs ne sont pas nuls, alors leur norme n'est pas nulle. Dès lors le produit scalaire est nul si et seulement si le cosinus l'est. Ceci arrive exactement pour des angles $\frac{\pi}{2}$ (des angles droits).*

Il faut retenir le principe suivant: le produit scalaire sert à dire quand deux vecteurs sont orthogonaux ou non.

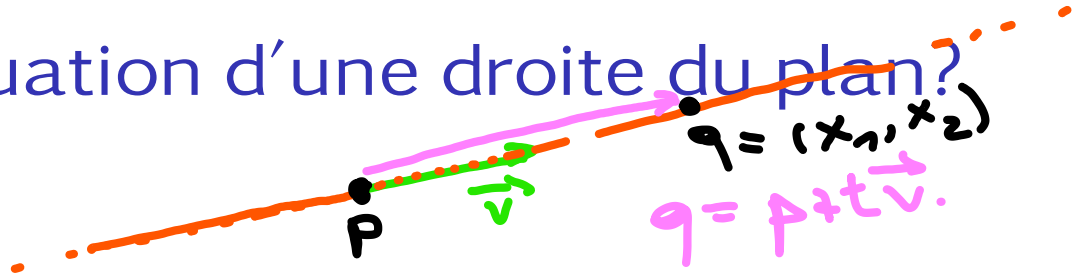
Quand deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux, on notera parfois

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}.$$

# Contenu de la section

Produit scalaire
- Définition
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Application aux équations de droites
- Lois trigonométriques

# Comment trouver l'équation d'une droite du plan?




## équation cartésienne

On a vu qu'une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $\mathbf{p}$ dans la direction $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points $(x_1, x_2)$ vérifiant

$$(x_1 - p_1)v_2 = (x_2 - p_2)v_1,$$

c'est-à-dire

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) = 0$$

pour $a = v_2, b = -v_1$. On réécrit ça comme

$$\left\langle \overrightarrow{n}, \mathbf{q} - \mathbf{p} \right\rangle = 0$$

pour $\overrightarrow{n} = (a, b) = (v_2, -v_1)$.

Si $\mathbf{q}$ est un point de la droite, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ est orienté dans la direction de la droite. Ce calcul montre donc que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur perpendiculaire (ou encore "vecteur normal") à la droite. Ecrire $\left\langle \overrightarrow{n}, \mathbf{q} - \mathbf{p} \right\rangle = 0$ est une manière de retrouver l'équation de la droite!

# Contenu de la section

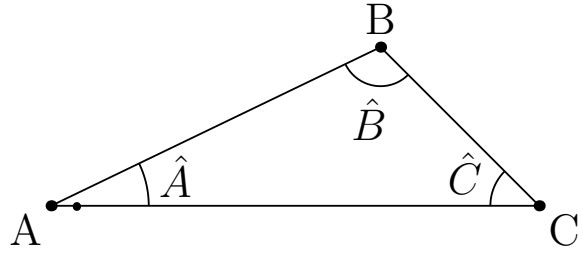
Produit scalaire
- Définition
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Application aux équations de droites
- Lois trigonométriques

# Loi des cosinus

## Résultat

*Soit un triangle de sommets $A, B, C$ et d'angles associés $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Alors:*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C}$$




Ceci est un théorème de Pythagore généralisé

Exo : Démontrez ce résultat en utilisant le prod scalaire.

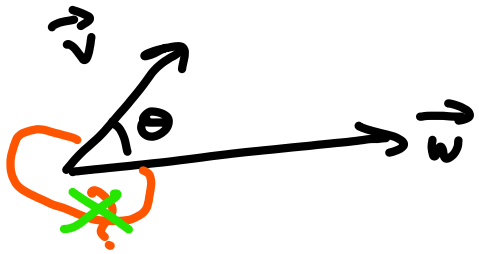
# Contenu de la section

## Produit vectoriel

# Contenu de la section

Produit vectoriel
Définition
Produit vectoriel et colinéarité

# Angle entre deux vecteurs




On commence par définir l'angle entre deux vecteurs:

↳ en terme des composantes des vecteurs.

## Définition

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. La mesure de l'*angle entre deux vecteurs* est l'unique nombre $\theta$ entre 0 et $\pi$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

.

Dans $\mathbb{R}^2$ cette définition découle directement de la propriété qu'on vient de voir:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

quand les vecteurs font un angle $\theta$. On décide alors de la prendre comme définition pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On se restreint à par parité de la fonction cosinus.

# Le produit vectoriel

## Définition

Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux **vecteurs** de $\mathbb{R}^3$. On définit leur *produit vectoriel* comme le vecteur dont les composantes sont les suivantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

où $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

En particulier, $\vec{a} \times \vec{b}$ est encore un vecteur de $\mathbb{R}^3$. (D'où le nom produit "vectoriel").

Résultat du prod. vectoriel.

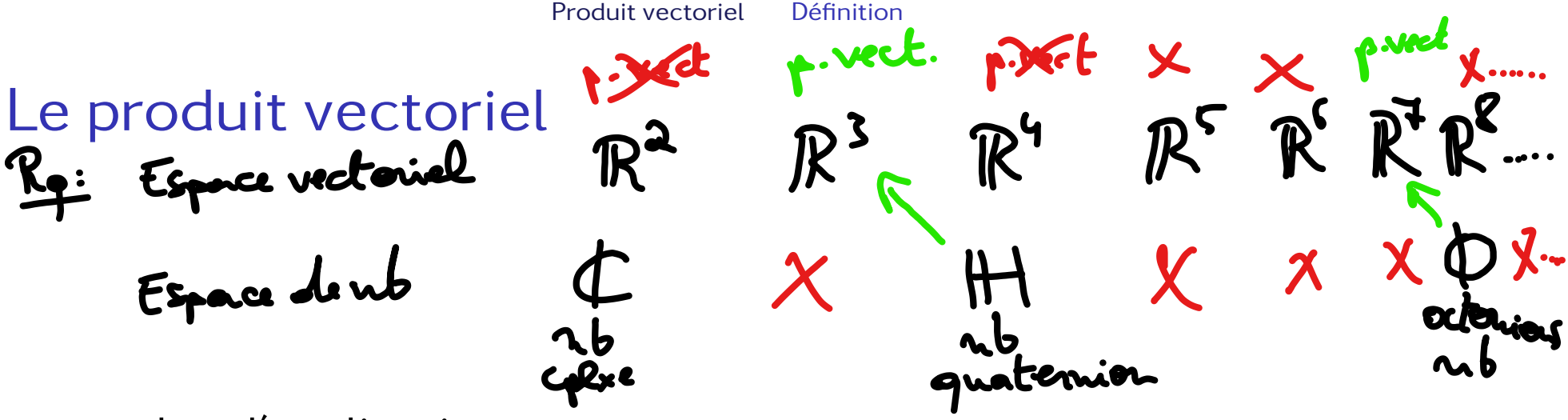
Le produit vectoriel est donc une fonction

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}.$$

## Remarque

Le produit vectoriel est parfois noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ au lieu de $\vec{a} \times \vec{b}$. Il n'est bien défini que pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

# Le produit vectoriel




exemples d'applications:

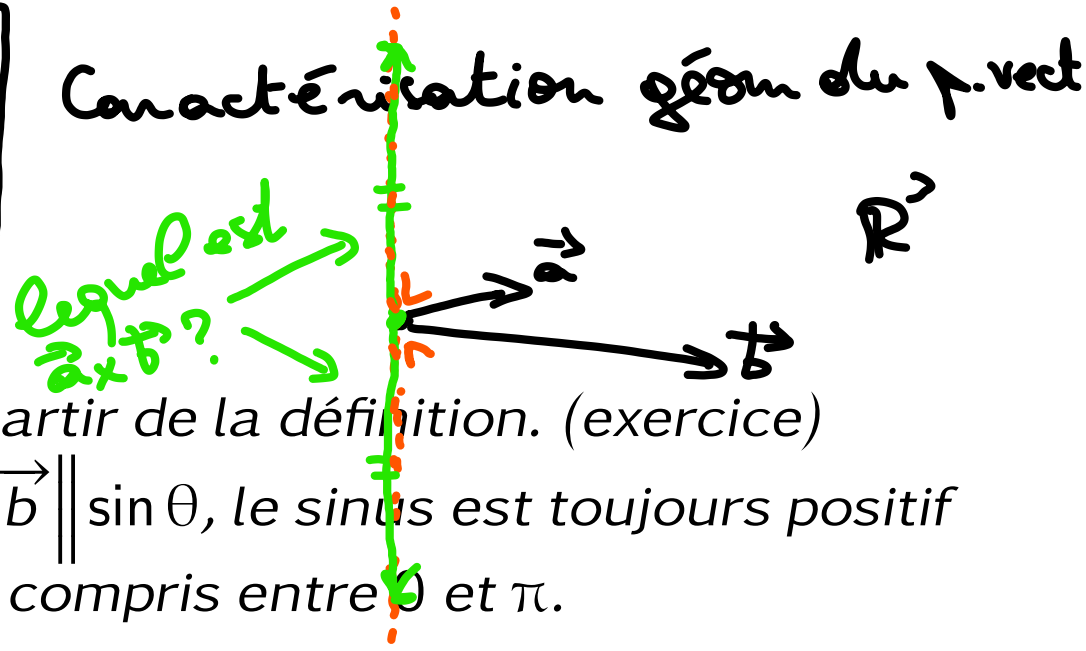
- Les géologues se servent du produit vectoriel pour analyser et prédire l'activité sismique.
- De même, en infographie et en animation par ordinateur, on utilise le produit vectoriel pour représenter la lumière par rapport à un plan donné.

# Propriétés du produit vectoriel

## Résultat

*Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}, \vec{a'}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ des vecteurs, et soit $\theta$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Alors:*

- $(\alpha\vec{a} + \alpha'\vec{a'}) \times \vec{b} = \alpha\vec{a} \times \vec{b} + \alpha'\vec{a'} \times \vec{b}$ *(linéaire à gauche)*
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ *(anti-symétrique) ;*
- $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$ ;
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ *et* $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ ;

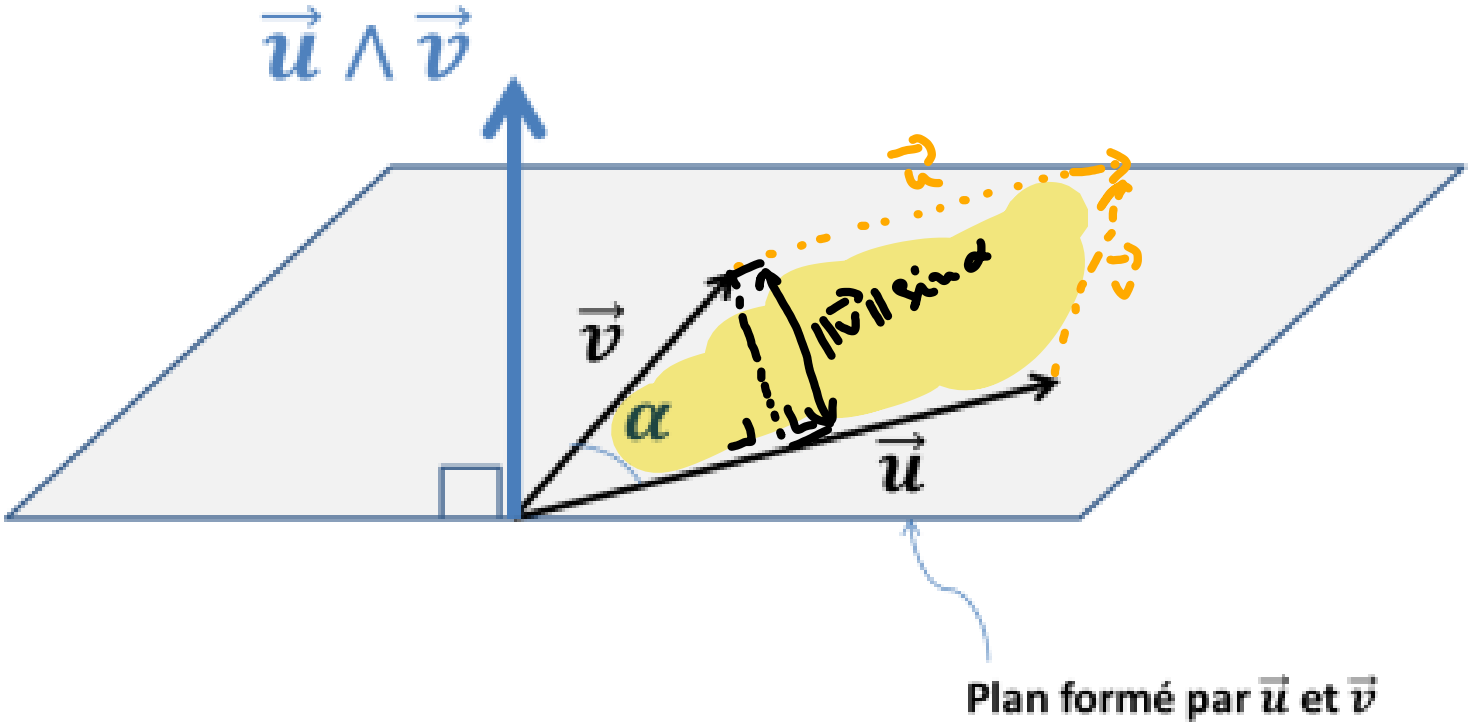



## Preuve

*Tous ces points se prouvent à partir de la définition. (exercice)*

*Dans l'égalité $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$, le sinus est toujours positif car l'angle $\theta$ est, par définition, compris entre $0$ et $\pi$.*

# Interprétation graphique



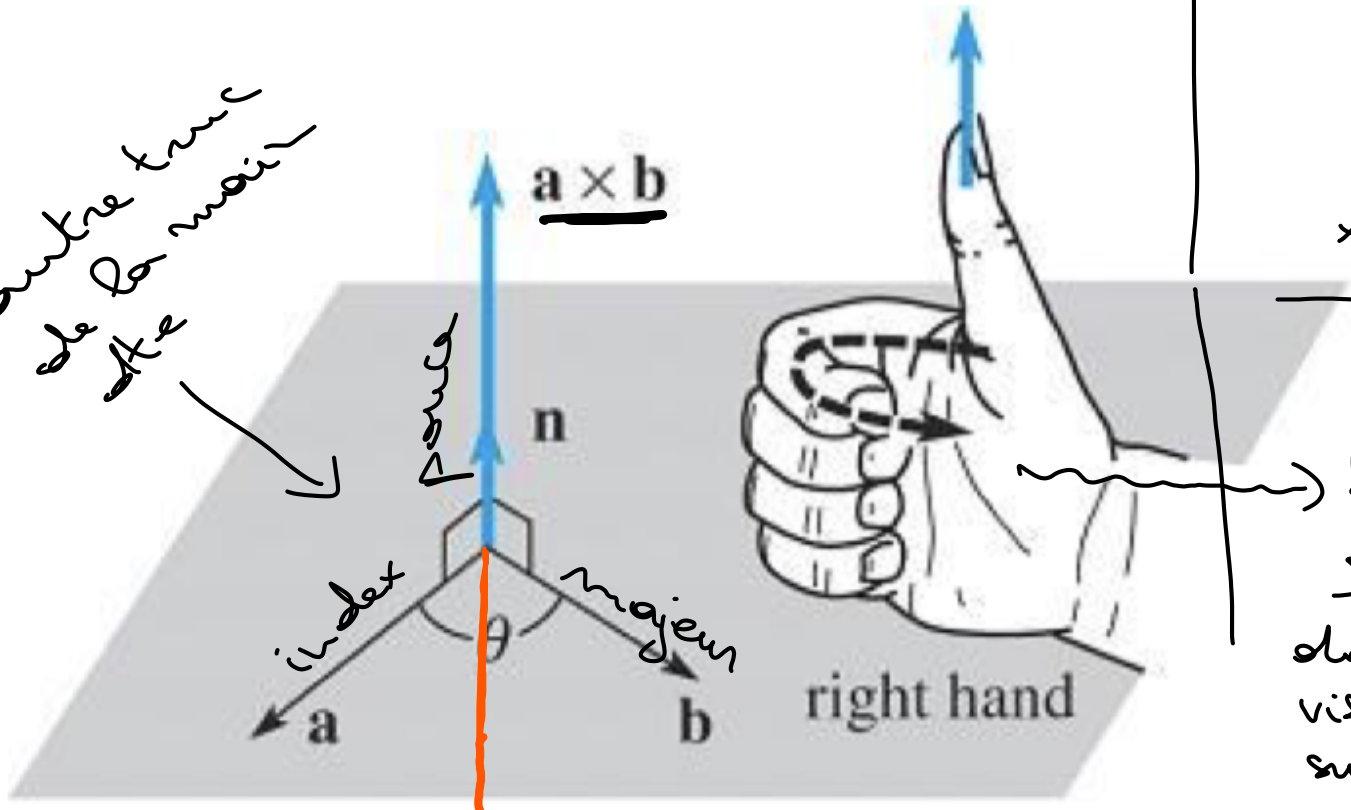

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur qui est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, il est donc orthogonal au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Sa norme:

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \sin\alpha$$

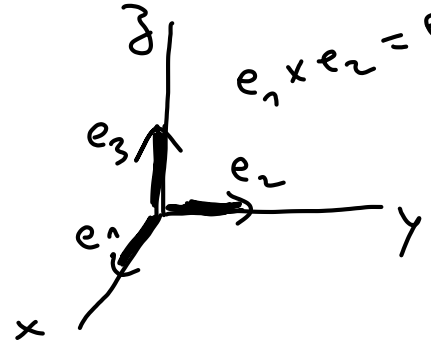
est égale à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

# La règle de la main droite

autre truc de la main droite




autre truc :
Retenir l'orientation du repère cartésien




C'est la Règle du tournevis.
Imaginez un tournevis dans cette main et visualisez le résultat sur le nut de la vis

pour b × a il faut retourner la main ce qui donne

# Contenu de la section

Produit vectoriel
Définition
Produit vectoriel et colinéarité

# Vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^3$

## Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **non nuls** de $\mathbb{R}^3$ sont colinéaires si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{v} = \lambda \vec{w}.$$

sur une même droite.

Ce sont des vecteurs de même direction mais de longueur différente et peut-être de sens opposés (si $\lambda < 0$).

Une convention: le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

↳ $\vec{0} = 0\,\vec{w}$

↑

nb zéro.

# Produit vectoriel et vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^3$

L'intérêt du produit vectoriel est de détecter les vecteurs colinéaires:

## Résultat

*Soient* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Alors* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

## Preuve

*On utilise:* $\left\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right\| = \left\|\overrightarrow{v}\right\| \left\|\overrightarrow{w}\right\| \sin\theta$, *où* $\theta$ *est l'angle entre* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$.
*Mais* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\theta = 0$ *ou* $\theta = \pi$, *et pour ces valeurs* $\sin(\theta) = 0$.

# Contenu de la section

## équations et systèmes dans l'espace

# Contenu de la section

équations et systèmes dans l'espace
Généralités
Lien avec les équations cartésiennes

## Définition

Une *équation* est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues.
Résoudre une équation revient à déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour les quantités inconnues de sorte que l'égalité soit vérifiée. Ces valeurs sont les *solutions* de l'équation.

Dans une de ses formes les plus simples, une équation fait intervenir une unique quantité inconnue : un nombre réel. La "quantité inconnue" (ou simplement "inconnue") est souvent nommée $x$, mais ce nom n'a rien de magique.

## Exemple

- L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.
- L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est $t$) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$. On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres. Par exemple $x = \pi$. En fait, l'ensemble des solutions est formé de l'ensemble des multiples entiers de $\pi$. On peut noter $S = \{k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}$. ⟵ infinité de solutions.
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans les nombres réels, car tout réel pris au carré est positif, donc $x^2 + 1$ ne peut jamais être égal à 0. L'ensemble des solutions est donc vide. On peut noter $S = \emptyset$.

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, *une* solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

## Exemple

L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont $x$ et $y$) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0,0)\}$.

Dans l'exemple ci-dessus, il y avait une équation, deux inconnues, mais une seule solution.
C'est rare. Généralement une seule équation avec deux ou plus inconnues possède une infinité de solutions.

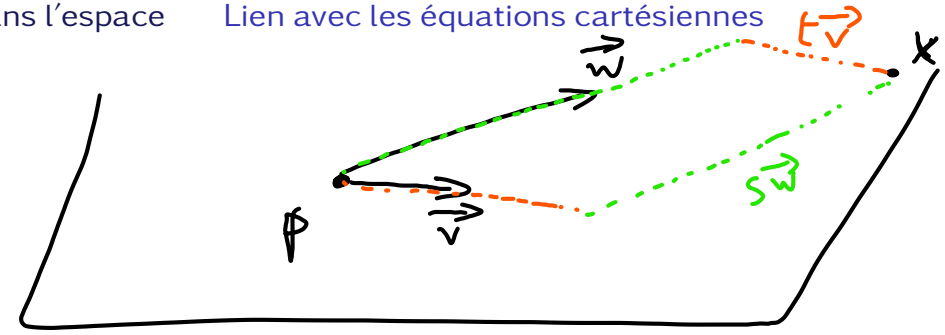
## Exemple

L'équation $x + y^2 = 0$ possède une infinité de solutions : pour chaque nombre réel $r$, les valeurs $y = r$ et $x = -r^2$ fournissent une solution.
On peut noter $S = \left\{(-r^2, r) \text{ t.q. } r \in \mathbb{R}\right\}$.

# Contenu de la section

équations et systèmes dans l'espace
Généralités
Lien avec les équations cartésiennes

# Plans dans l'espace




## équation vectorielle

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs **non-colinéaires** (ce qui signifie: $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$). Un plan passant par le point **p** dans les directions des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est l'ensemble des points **x** de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{v} + s\vec{w}.$$

lorsque $s, t$ décrivent $\mathbb{R}$. Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan.

écriture en composantes/coordonnées.

$P=(p_1,p_2,p_3)$ / $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ / $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

## équations paramétriques

Un plan est l'ensemble des points $(x_1, x_2, x_3)$ de la forme

$$x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1$$
$$x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2$$
$$x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3$$

pour certains réel $s$ et $t$.

(peut être obtenue en isolant s et t dans les éq. paramétrique par exemple).

## équation cartésienne

Un plan consiste en les points $(x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

pour certaines constantes $a, b, c, d$. De manière équivalente :

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

où $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est un point du plan.

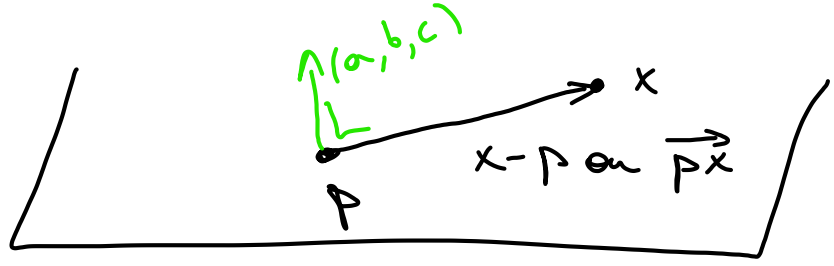
↳ $ap_1 + bp_2 + cp_3 = -d$

## équation cartésienne, version 2

Un plan passant par $\mathbf{p}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$\left\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \vec{n} \right\rangle = 0$$

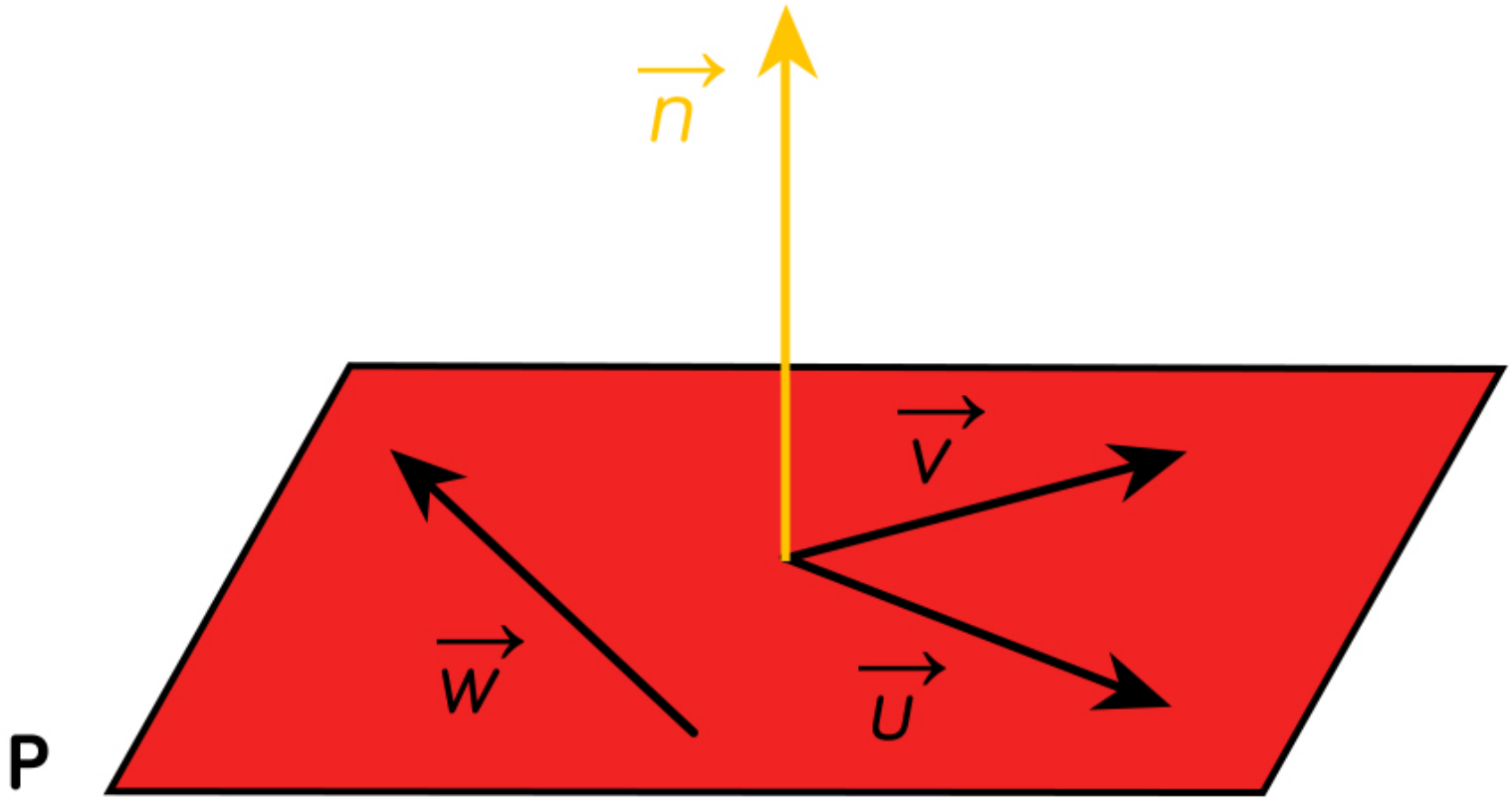
pour un certain vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ : le vecteur normal (ou encore "orthogonal").



# Comment trouver le vecteur normal?

## Résultat

*Si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan $P$, alors leur produit vectoriel est un vecteur normal à $P$.*



# Un exercice d'application

## Question

Quelle est l'équation du plan $(P)$ de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $\mathbf{a} = (1,4,2)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $\mathbf{b} = (1,2,-1)$ et $\mathbf{c} = (1,1,1)$?

## Réponse

**étape 1:** on calcule un vecteur directeur de la droite $(\mathbf{bc})$, qui sera donc un vecteur normal au plan. Par exemple le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{bc}}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{bc}} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (0,-1,2).$$

**étape 2:** Un point $\mathbf{p} = (x,y,z)$ appartient au plan $(P)$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathbf{ap}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{bc}$: c'est-à-dire si et seulement si

$$\langle (x-1,y-4,z-2),(0,-1,2)\rangle = 0.$$

Ceci donne l'équation: $-(y-4)+2(z-2)=0$, soit:

$$y = 2z.$$