Limites et continuité pour les fonctions réelles d'une variable réelle.

(Syllabus Chapitre IX, paragraphes 3 - 4; sauf notations de Landau)

Le cadre

Dans ce chapitre et les suivants nous allons étudier des fonctions réelles d'une variable réelle.

Il s'agit de fonctions $f : A \to B$ définies à partir d'ensembles A et B inclus dans $\mathbb{R}$, ce qu'on note

$$A \subset \mathbb{R} \text{ et } B \subset \mathbb{R}.$$

Contenu de la section

Limites

Rappel: Distances

Rappel

La distance entre deux réels quelconques x et y est $|x-y|$.

Si $\delta > 0$, dire que $|x-y| < \delta$ revient donc à dire que la distance entre x et y est strictement inférieure à δ.

En utilisant les intervalles, on écrira:

$$|x-y| < \delta \iff y \in]x-\delta, x+\delta[\iff x-\delta < y < x+\delta$$

réécriture de $|x-y| < \delta$ en utilisant la déf de valeur absolue.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilisera souvent la notation suivante:

$$|x-y| < \delta, \quad y \neq x.$$

Ceci signifie que

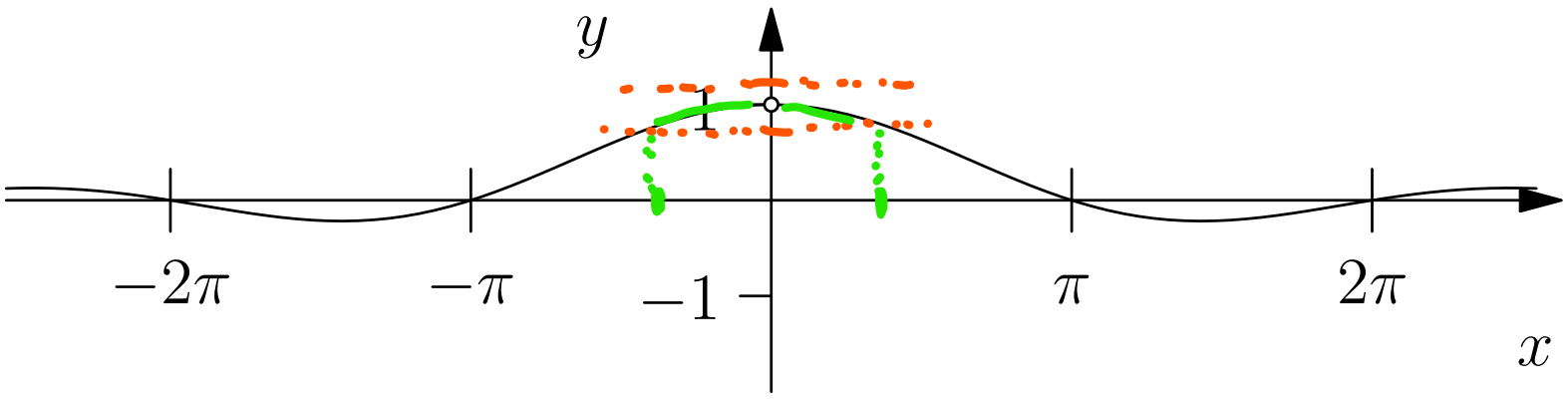
$$y \in]x-\delta, x+\delta[\backslash\{x\} =]x-\delta, x[\cup]x, x+\delta[.$$

Contenu de la section

Limites
- Limites en un point
- Limites infinies, limites à l'infini

Idée intuitive de limite

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Son graphe est :



La valeur $f(0)$ n'est a priori pas définie car on ne peut pas diviser par 0. En même temps, $\sin(0) = 0$. On sait que $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens, mais à partir de ce qu'on voit sur le graphe on aurait quand même envie de dire que $f(0) = 1$!
À la place, après avoir défini la notion de limite, on dira:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

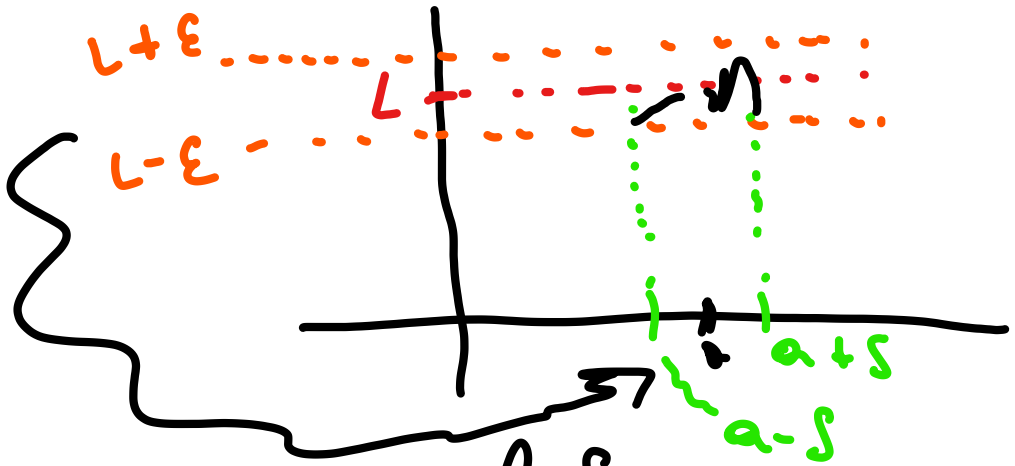
Définition rigoureuse de limite (avec les ε, δ)

Définition

Soit $f :]c, d[\to \mathbb{R}$ et soit $a \in [c, d]$. On dit qu'un nombre réel L est la *limite de f en a* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\Big(\forall x \in]c, d[, |x - a| < \delta, x \neq a\Big) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$



Trouver le δ

Dans la pratique : on cherche un δ qui dépend de ε.

Définition rigoureuse de limite

Si la limite (de f en a) existe et vaut L on écrira

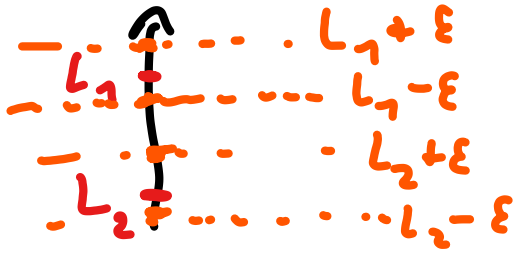
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Définition

S'il n'existe pas de $L \in \mathbb{R}$ tel que L est la limite de f en a est L, on dit que la limite de f en a n'existe pas (dans $\mathbb{R}$).

Résultat

Quand la limite de f en a existe, elle est unique!



avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit.

Ré-écrivons la définition:

Définition

On dit qu'un nombre réel L est la *limite de f en $a \in [c,d]$* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\Big(\forall x \in]c,d[, |x-a| < \delta, x \neq a\Big) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Cette définition dit la chose suivante: on choisit une précision $\epsilon > 0$.
Alors, si la fonction a une limite L en a, on peut associer à ce ϵ une distance $\delta > 0$ (qui va dépendre de ε).
Alors pour tout x à distance strictement inférieure à $\delta > 0$ de a, les valeurs de $f(x)$ sont à une distance strictement inférieure à ϵ de L.
Et cette propriété reste vraie pour tout choix de $\varepsilon > 0$.

Dire que f a pour limite L en a revient à dire que

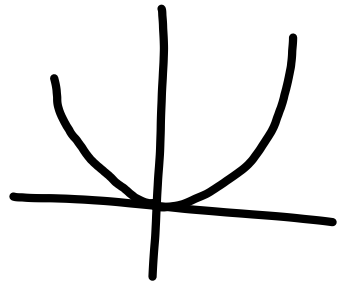
Si x est proche de a, alors $f(x)$ est proche de L.

Remarque

L'ordre des quantificateurs "pour tout" et "il existe" est essentiel!

Un exemple de calcul de limites

Résultat



$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

On va le montrer en utilisant la définition précise.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$. Pour montrer que la définition s'applique, il faut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$si\ |x - 0| < \delta\ alors\ |x^2 - 0| < \epsilon.$$

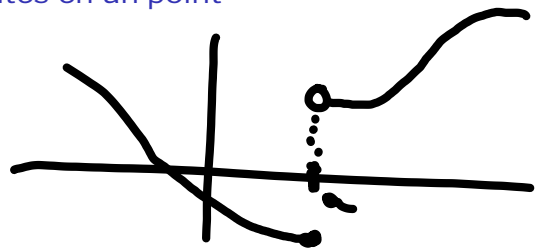
On va choisir un certain δ en fonction de ϵ.

On choisira par exemple $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Car

$$|x - 0| < \sqrt{\epsilon} \Longrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon} \Longrightarrow x^2 = |x|^2 < \epsilon \Longrightarrow |x^2 - 0| < \epsilon.$$

On a vérifié la définition.

Limites restreintes



Il arrivera souvent qu'une fonction f soit définie seulement d'un côté d'un point donné et qu'on veuille étudier sa limite en ce point.
Par exemple: Si f est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ et qu'on veut étudier sa limite en 0. Dans ce cas on parlera de limite

La définition de limite à droite en un point a est semblable à celle de limite générale, à ceci près qu'on n'autorise que des points strictement plus grands que a:

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à droite de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

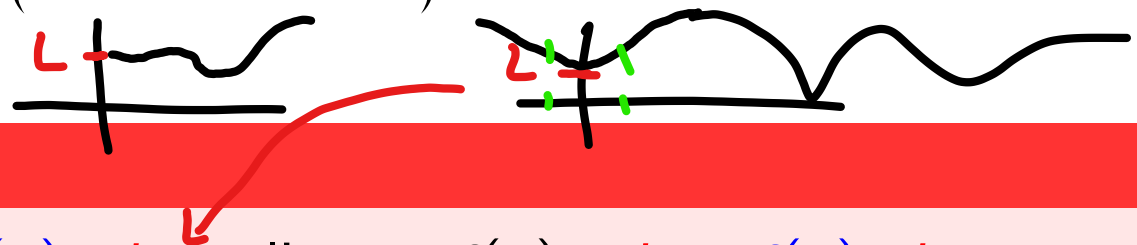
La limite à gauche se définit de la même manière avec $a - \delta < x < a$.

Quand elles existent, on notera les limites à droite et à gauche respectivement de la manière suivante:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

Ceci rend compte des conditions sur x.

Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) de la limite on le notera "avec un plus:



Définition

On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = L_+$ si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et $f(x) > L$ pour x proche de a.

De la même manière, on peut aussi écrire $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = L_+$, etc...

Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

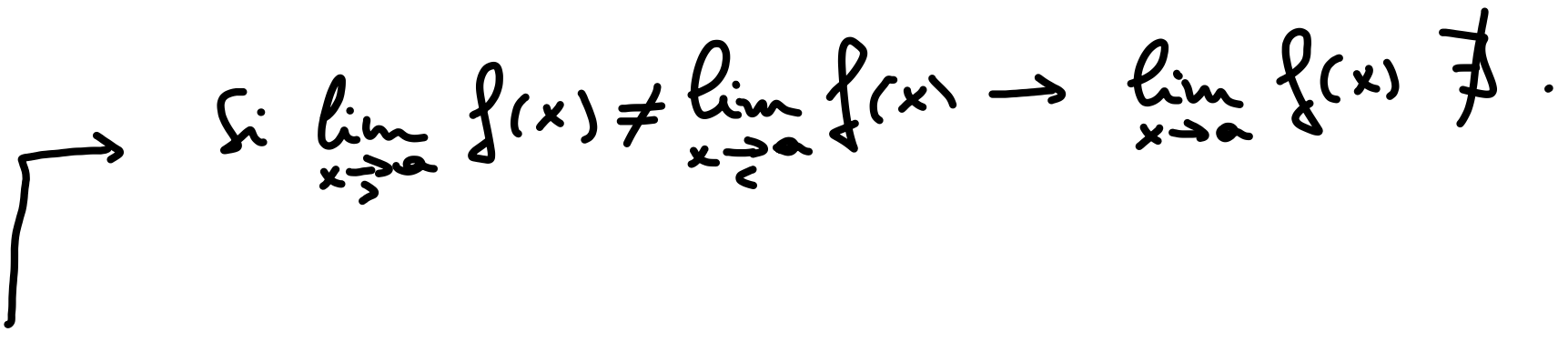
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$



Exemple

En anticipant un peu sur la suite de ce cours ceci nous permettra d'écrire:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Remarque

Lorsque la limite de f en a existe, alors les limites à gauche et à droite existent et valent $\lim_{x\to a} f$.

Mise en garde

Attention, dans certains cas une fonction peut ne pas avoir de limite, mais les limites à gauche et à droite peuvent quand même exister. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{|x|}{x},$$

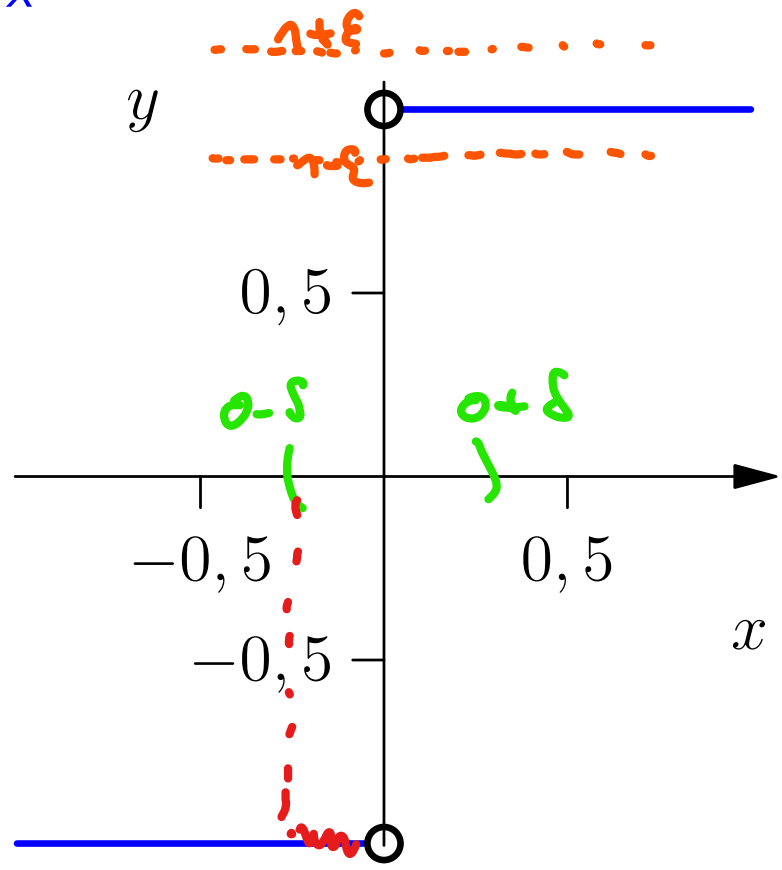
définie pour $x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Comme $|x| = x$ si $x > 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, on a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, la limite lorsque $x \to 0$ de $|x|/x$ n'existe pas, mais

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$$



Contenu de la section

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \neq 1$ car : Négation de la déf de limite :

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x : |x| < \delta$ mais $\left|\frac{|x|}{x} - 1\right| \geq \varepsilon$

- $\varepsilon = \frac{1}{2}, \forall \delta > 0 : x = -\frac{\delta}{2}$ mais $|-1-1| = |-2| \not< \frac{1}{2}$

$|-\frac{\delta}{2}| = |\frac{\delta}{2}| < \delta$

Limites

Limites en un point

Limites infinies, limites à l'infini

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \not\to$ car

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} - 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Idée intuitive de limite infinie / à l'infini

On est souvent amenés à observer l'évolution d'une grandeur naturelle, notée $Q(t)$ sur un intervalle de temps très grand.
Parfois les valeurs de cette grandeur $Q(t)$ se stabilisent lorsque le temps devient très grand (par exemple: la batterie de votre téléphone se vide!) et deviennent de plus en plus proches d'une valeur L donnée.

On aurait alors envie de dire que, lorsque le temps t "devient infini", $Q(t)$ tend vers L quand t tend vers l'infini.

De même: si $Q(t)$ devenait de plus en plus grande sans jamais s'arrêter, on aurait envie de dire que $Q(t)$ tend vers l'infini.
On va formaliser ces deux notions maintenant.

Limite $-\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$

On commence par définir "avoir une limite $-\infty$ en un point".

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, A un intervalle borné et a un point (ou une extrémité) de A.

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour x tendant vers a si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta, x \neq a, \Rightarrow f(x) < -M.$$

On note cette situation

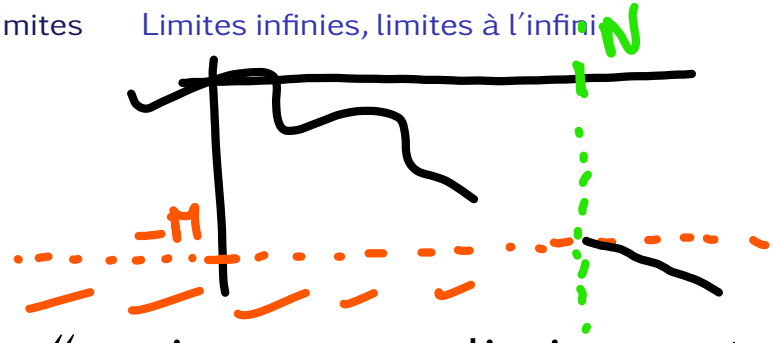
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se lit "la limite de f en a vaut $-\infty$" pour x tendant vers a

Limite $-\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$

Cette définition dit la chose suivante: on choisit un nombre réel $M > 0$. Alors, dire que f a $-\infty$ comme limite en a veut dire que, lorsque x est assez proche de a ($|x - a| < \delta$), f prend des valeurs inférieures à $-M$. Comme on peut prendre M aussi grand qu'on veut (en diminuant δ), f devient aussi négative qu'on veut quand on se rapproche de a.

Limite $-\infty$ en $+\infty$



Voici maintenant la définition de "avoir $-\infty$ pour limite en $+\infty$":

Définition

Soit $f :]b, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour x tendant vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x \in A, x > N \Rightarrow f(x) < -M$$

on note cette situation

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Autrement dit: pour tout $M > 0$, lorsque x devient suffisamment grand ($x > N$) les valeurs de $f(x)$ restent en-dessous de $-M$. Comme on peut prendre M aussi grand qu'on veut, f devient aussi négative qu'on veut quand x devient très grand.

Autres définitions de limites

On peut définir de la même manière des limites égales à $\pm\infty$ en un point et à $\pm\infty$ en $\pm\infty$, en adaptant les définitions. Les définitions sont semblables et, par manque de temps, nous ne les traiterons pas ici. Je vous renvoie au syllabus pour les autres définitions. Vous devrez savoir manipuler les autres notions de limite.

Remarque

Attention, le symbôle ∞ n'a pas de sens clair! À chaque fois qu'on écrit $\pm\infty$, le sens précis qu'il faut comprendre est celui des définitions: une fonction qui devient de plus en plus grande ou de plus en plus négative.

Contenu de la section

Calcul de limites

Contenu de la section

Calcul de limites
Limites et opérations
Règles étendues

Limites et opérations

Résultat

Si les deux limites, $\lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existent et sont finies, alors* $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ *et* $\lim_{x\to a} cf(x)$ *pour un réel* c *existent aussi. Et on a*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x), \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

Si, de plus $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ *alors* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe et on a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Ces règles restent vraies si $a = \pm\infty$.

Composition de limites

Résultat

Soit une fonction composée $g \circ f$. *Si on sait que* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *et que* $\lim_{y \to L} g(y)$ *existe, alors* $\lim_{x \to a} g(f(x))$ *existe et on a*

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to L} g(y)$$

Application de la composition des limites

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Exemple

On admet pour l'instant que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 en 0.

Alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 3$$

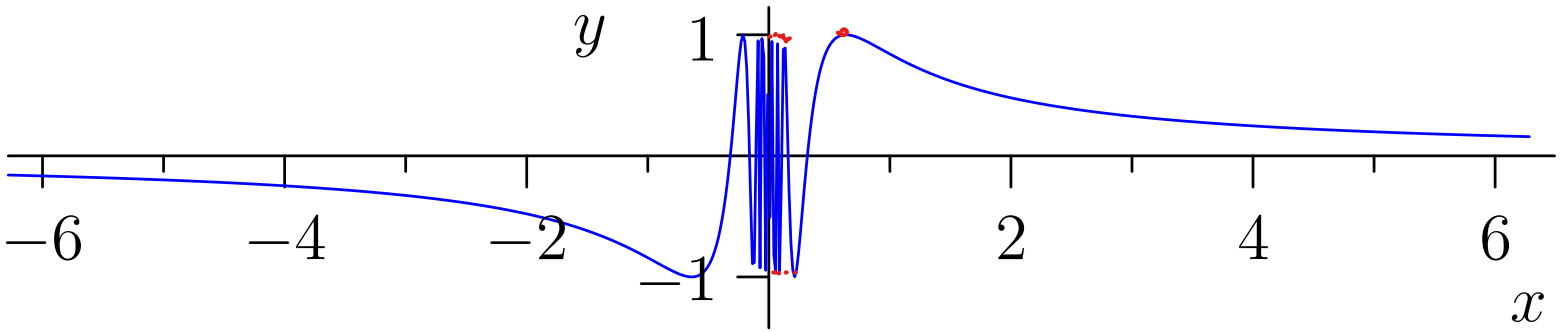
Ici on a posé: $t = 3x$. Et t tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Remarque

En d'autres termes, on peut poser $t =$ fonction de x, remplacer tous les x par des t, et considérer la limite pour t.

Certaines fonctions n'ont pas de limite

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$. Son graphe est :



La valeur $f(0)$ n'a aucun sens car 0 n'est pas dans le domaine (car $\frac{1}{0}$ n'a aucun sens).
Lorsque x s'approche de 0, par exemple par les nombres positifs, $\frac{1}{x}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc $\sin(1/x)$ oscille constamment entre -1 et 1, car sin est 2π périodique, mais ne s'approche d'aucune valeur. On dira donc que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ n'existe pas.}$$

Ne confondez pas $\sin(1/x)$ et $\frac{\sin(x)}{x}$!

Contenu de la section

Calcul de limites
Limites et opérations
Règles étendues

Nous avons vu précédemment les règles de calcul pour des limites finies. Voici ce qui se passe pour des limites infinies:

Résultat

Lorsque les limites (en un point ou en $\pm\infty$) valent $\pm\infty$, les règles suivantes sont vraies pour les limites:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$c\cdot(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty & si\ c>0\\ \mp\infty & si\ c<0\ \textit{(! changement de signe.)}\end{cases}$$

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$$

Certaines situations n'obéissent à aucune règle et doivent être étudiées au cas par cas. En particulier, les quantités suivantes n'ont aucun sens a priori :

$$+\infty - \infty,\ 0 \cdot (\pm\infty),\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^0,\ \frac{0}{0}\ \text{et}\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Ce sont des *formes indéterminées.*

Exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = ?$$

On ne peut pas appliquer la règle de calcul du quotient. Car c'est une situation du type $\frac{0}{0}$. Mais on remarque qu'on peut simplifier l'expression en divisant par x en haut et en bas (car $x \neq 0$ par définition). Alors :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

On termine avec une remarque sur les limites de quotients.

Résultat

Pour le quotient, on appliquera les règles suivantes:

$$\frac{L}{0^+} = \begin{cases} +\infty & si\ L > 0 \\ -\infty & si\ L < 0 \end{cases} \qquad \frac{L}{0^-} = \begin{cases} -\infty & si\ L > 0 \\ +\infty & si\ L < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\pm\infty}{0^+} = \pm\infty \qquad \frac{\pm\infty}{0^-} = \mp\infty \text{ (changement de signe !)}$$

La notation 0^+, comme avant, signifie que c'est une limite nulle mais en s'approchant de 0 par des valeurs toujours strictement positives.

Contenu de la section

Continuité

Définition

Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est dite *continue au point a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition

f est *discontinue au point a* si f n'est pas continue au point a.

Définition

f est *continue (sur son domaine)* si elle est continue en chaque point a de son domaine.

Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car elle est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Car si $a \neq 0$, on a bien

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

par les règles de calcul pour les limites finies.

Attention, cette fonction n'est pas définie en 0. Donc ça n'a pas de sens de parler de sa continuité en 0!

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues :

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
- $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
- Les fonctions classiques: sin, cos, tan, ln, exp, ... sont toutes continues sur leur domaine de définition.

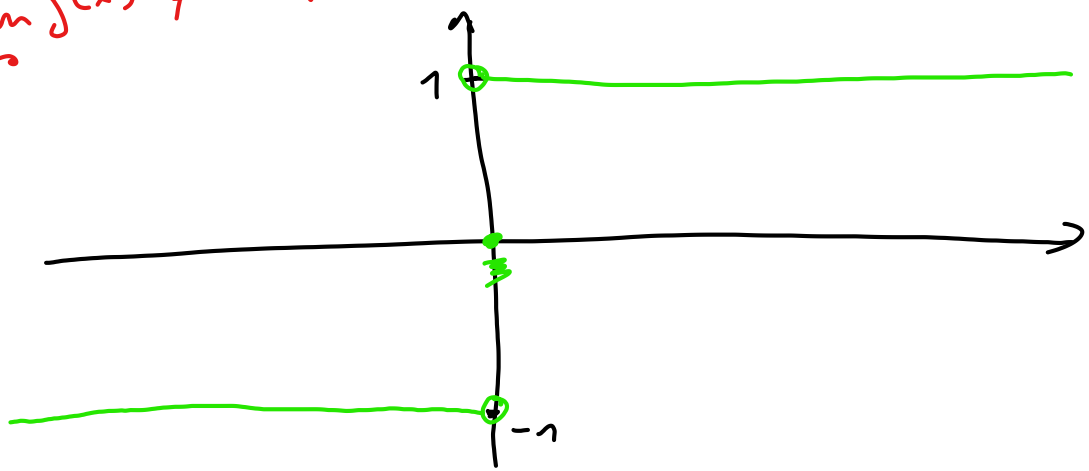
Exemple

La fonction

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x}{|x|} \text{ pour } x \neq 0 \\ x \mapsto 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

est discontinue en 0. Car on a vu précédemment qu'elle n'admet pas de limite en 0.

↳ $\lim_{x \to 0} j(x) \not\exists$ en particulier elle ne vaut pas $j(0)$.



Leitmotiv: Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Ou encore: si son graphe n'a pas de "sauts".

Contenu de la section

f continue en a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

a π Dom f

f continue si continue en tt $a \in$ Dom f.

Continuité

Continuité et opérations

Propriétés importantes des fonctions continues

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

La continuité obéit aux mêmes règles que les limites. Soient deux fonctions f et g continues en un point a. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

$= f(a) + g(a)$

$= (f+g)(a).$

- $f + g$ est continue en a
- cf est continue en a
- fg est continue en a

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors

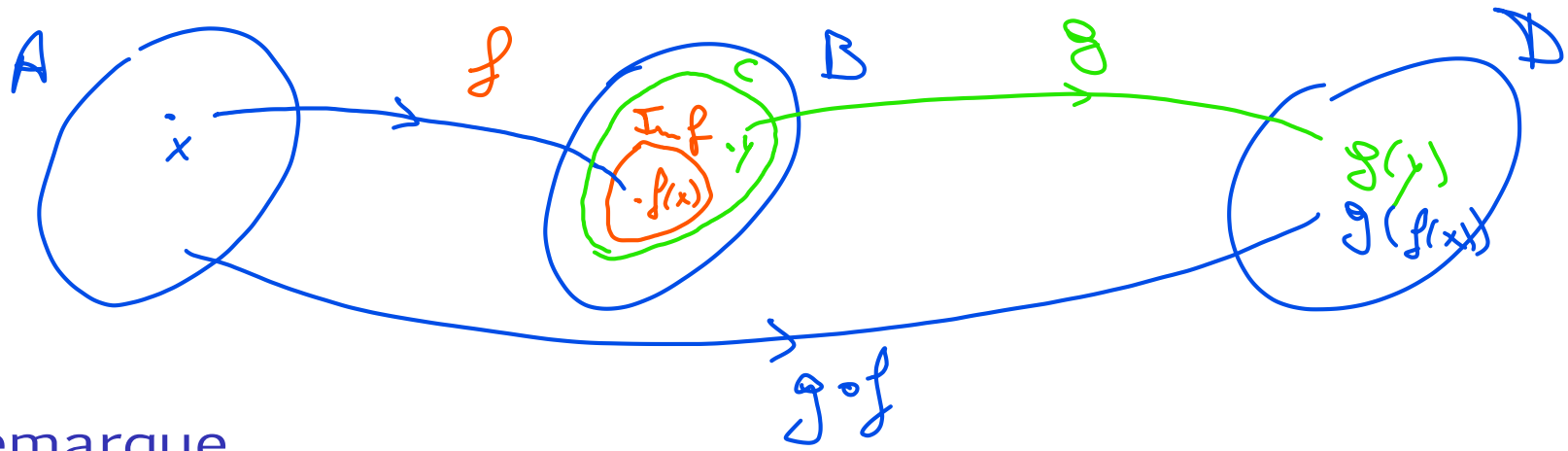
$\frac{f}{g}$ est continue en a.

Continuité d'une fonction composée

Résultat

Si $f : A \to B$ et $g : C \to D$, avec $\operatorname{Im} f \subset C$ (de sorte que la composée $g \circ f$ a du sens), si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors

$g \circ f$ est continue en a.



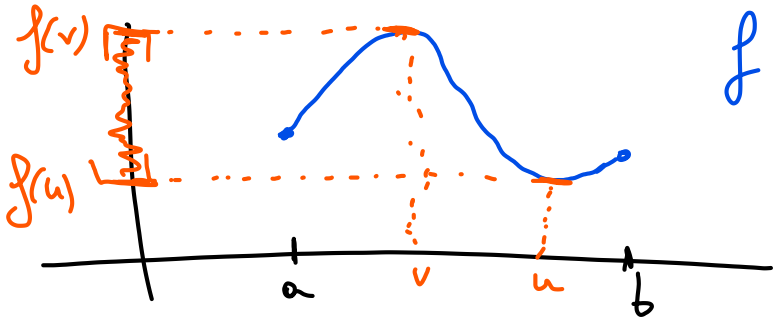
Remarque

Ces règles de calculs sont des conséquences directes des règles de calculs pour les limites.

Contenu de la section

Continuité
Continuité et opérations
Propriétés importantes des fonctions continues

Le théorème des bornes atteintes



Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image $f([a, b])$ est encore un intervalle fermé: il existe u, v deux réels dans $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(u), f(v)]$.

Ce résultat dit que lorsqu'une fonction est continue, elle n'évite pas de valeurs.

→ ⚠ pas forcément $[f(a), f(b)]$

Exemple

L'image de $[0, 2\pi]$ par la fonction sinus est $[-1, 1]$, qu'on peut effectivement ré-écrire $[\sin(3\pi/2), \sin(\pi/2)]$.

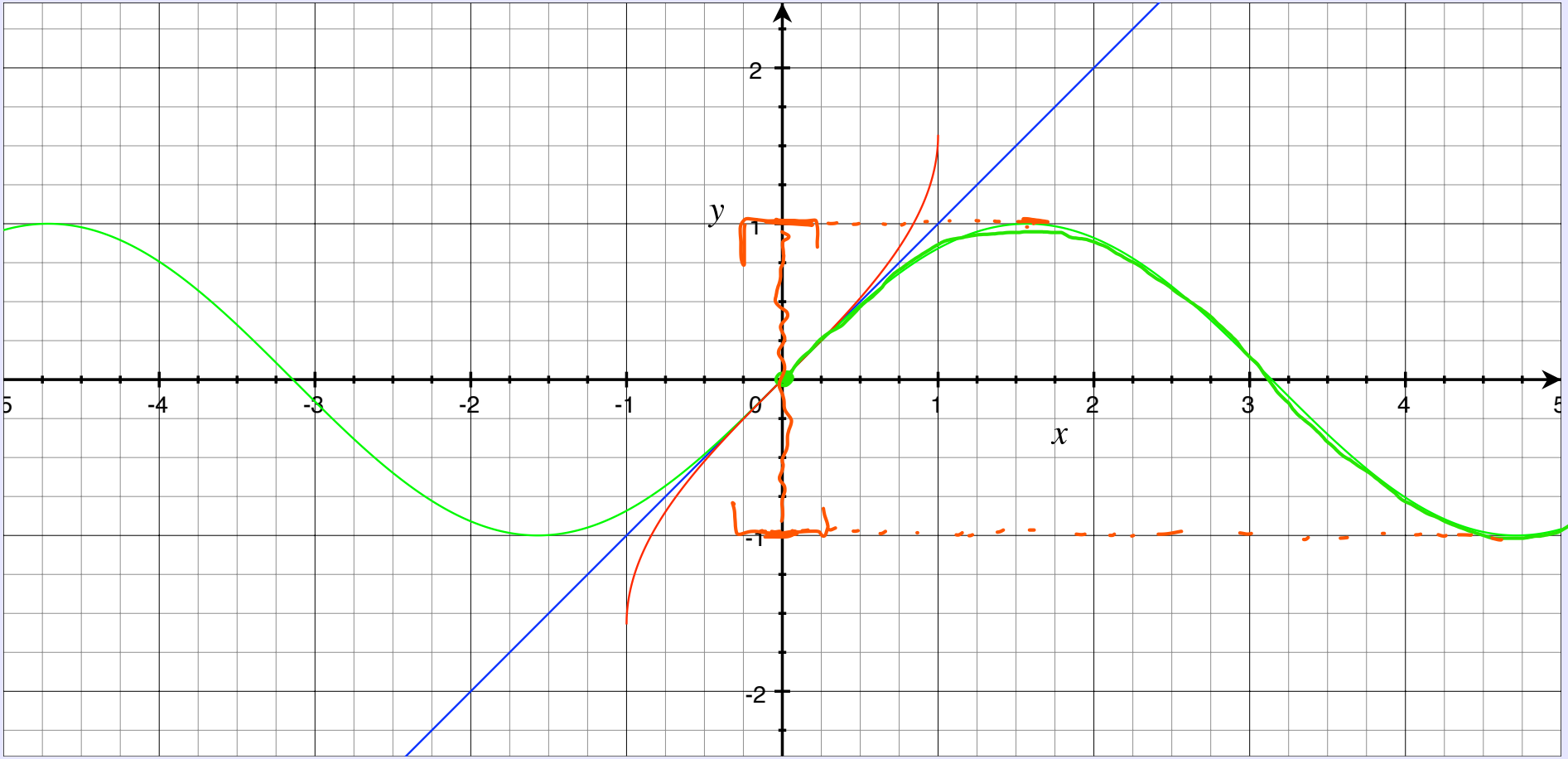


Figure: Graphe de sin (en vert)

Théorème des valeurs intermédiaires

Nous avons interprété les fonctions continues comme des fonctions dont le graphe peut se tracer "sans lever le crayon".
Dès lors, il semble clair que si le graphe d'une fonction continue "démarre" en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Quel c ?
Le théorème ne le dit pas....

Équation : $f(x) = 0$ a-t-elle une solution ?
avec f continue

Une conséquence frappante est la suivante:

Résultat

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

↳ Solution de l'éq $f(x) = 0$?
Quels c ?
Le résultat assure l'existence d'une solution mais ne dit rien sur sa valeur.