Fonctions réciproques

(Syllabus Chapitre IV, partie 3, et Chapitre IX partie 3.3)

Rappels

Définition

Une *fonction f* c'est :

- un *ensemble de départ A*,
- un *ensemble d'arrivée B* et
- une règle qui associe à chaque élément x de A un unique élément de B, noté $f(x)$.

Une fonction est donc une manière d'associer à tout élément x de A un élément $f(x)$ de B.

- $f(x)$ est l'*image* de x par f.
- On dit aussi que x est un *antécédent* de $f(x)$.

La notation pour une fonction f de A dans B est

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ ou encore } f : A \to B : \quad x \mapsto f(x).$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Contenu de la section

Fonctions réciproques
Définitions
Fonctions réciproques
Logarithme et exponentielle
Fonctions trigonométriques réciproques
Continuité des fonctions réciproques

$\forall x \in X$: $\exists$ un unique élément $f(x) \in Y$.

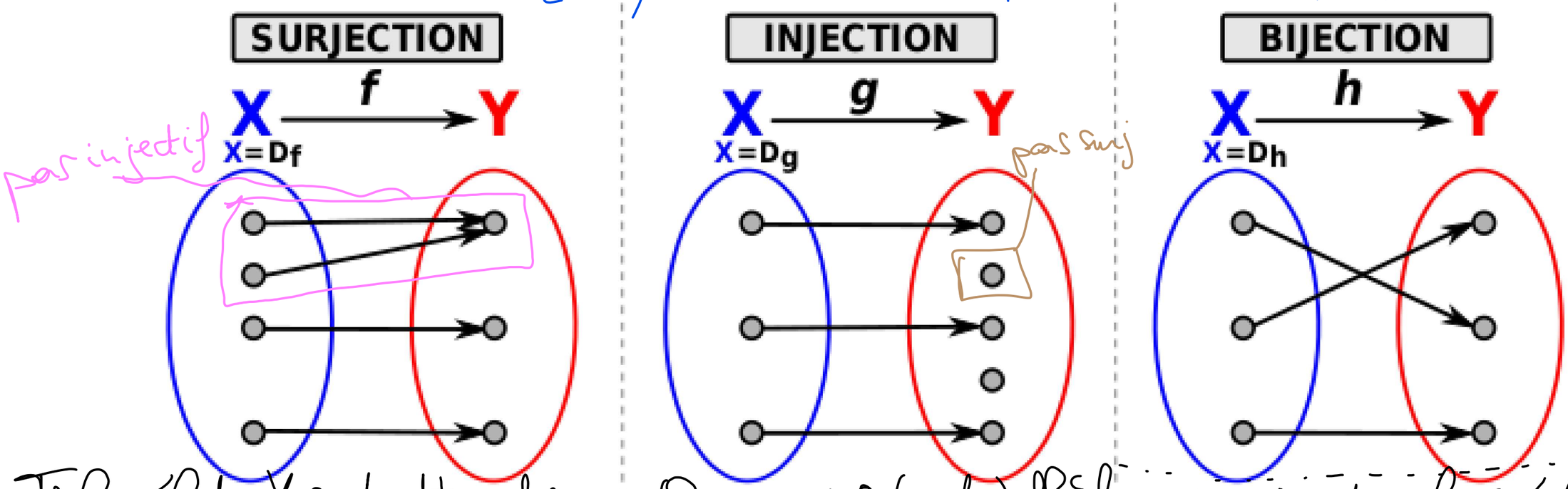
Injectivité, Surjectivité, Bijectivité

Définition

Soit $f : X \to Y$ une fonction.

- f est dite *surjective* si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X ; $[\forall y \in Y : \exists x \in X \text{ tq } y = f(x)]$
- f est dite *injective* si deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y ; $[\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- f est dite *bijective* si f est à la fois injective et surjective.

↳ $[\forall y \in Y : \exists$ un unique $x \in X$ tq $y = f(x)]$

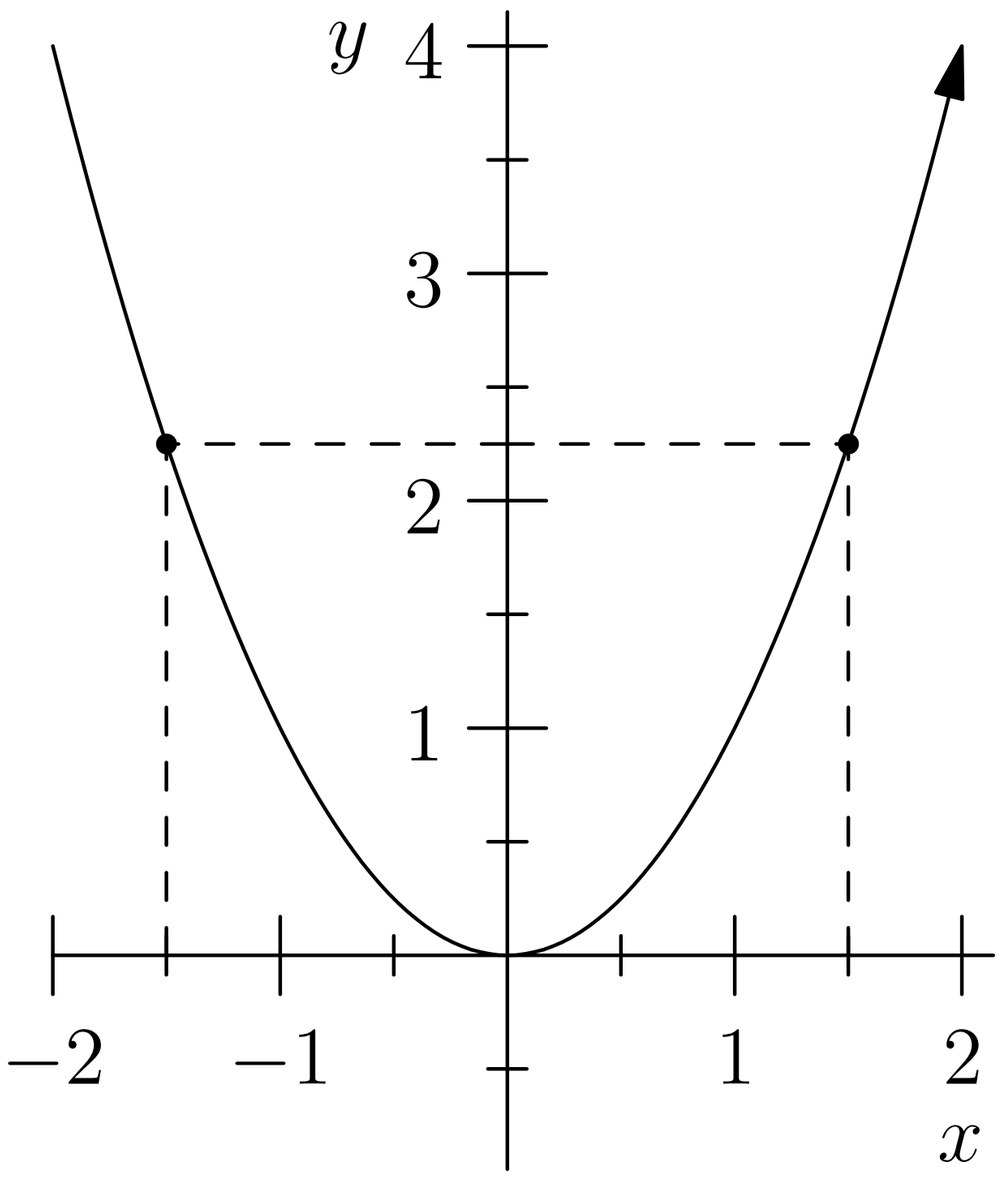


Ts les él de Y sont atteints

On a pas 2 (ou plus) flèches qui arrivent sur le m él de Y !

Exemples avec des fonctions réelles

La fonction $f : x \mapsto x^2$ change de nature quand on change ses ensembles de définition:



- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ elle est surjective mais non injective: car tout réel $y \geq 0$ s'écrit comme $y = x^2$ avec $x = \sqrt{y}$. Mais $f(-x) = f(x)$.
- Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ alors f est surjective et injective, donc bijective. Car si $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$: c'est précisément $\sqrt{y}$.
- Enfin si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle n'est rien du tout: car les réels négatifs ne sont pas dans l'image de f et $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour reformuler

Pour reformuler: une fonction $f : A \to B$ est

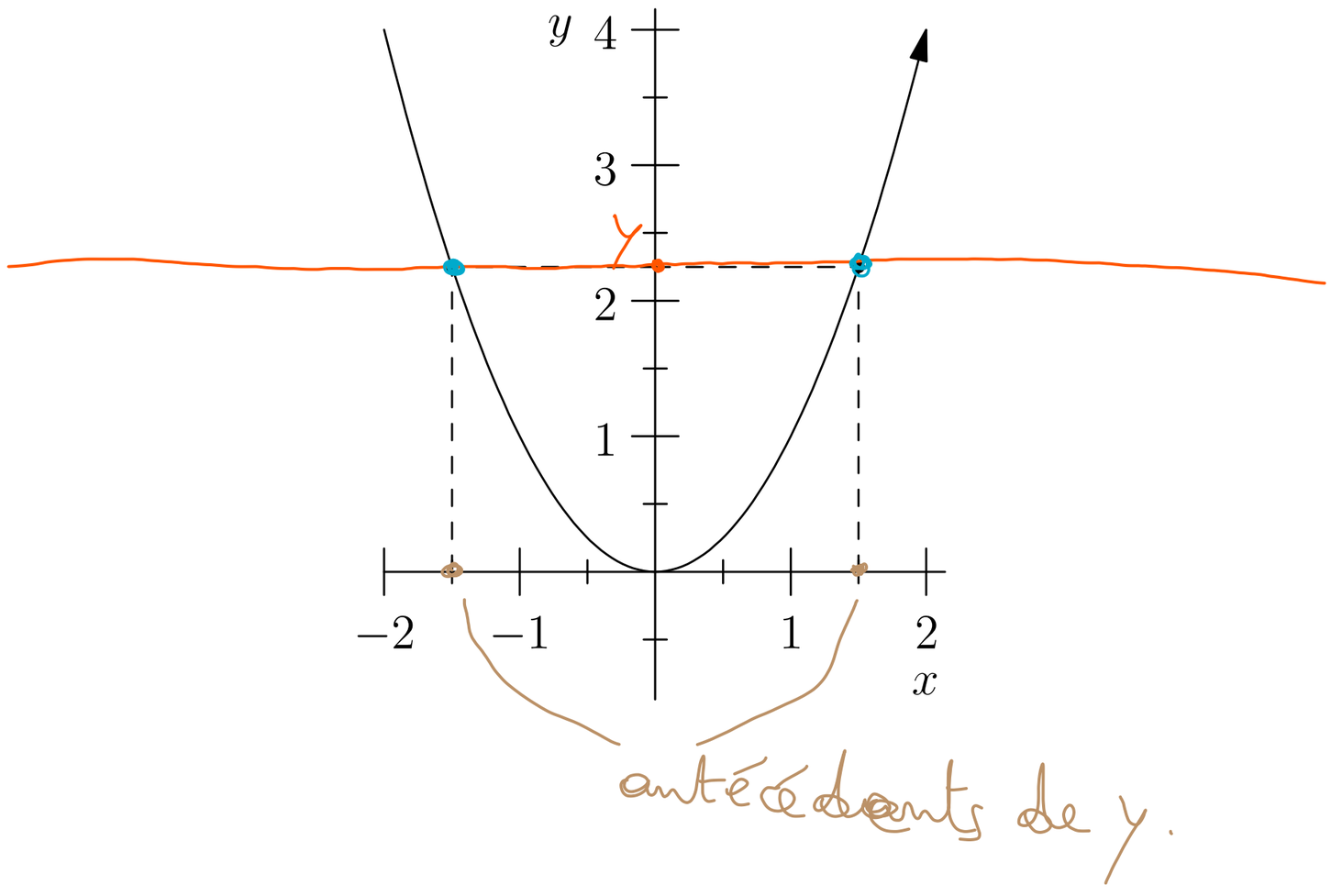
- surjective si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A
- injective si tout élément de B est l'image d'au plus un élément de A
- bijective si tout élément de B est l'image d'un unique élément de A.

Attention, une fonction peut très bien n'être ni surjective ni injective (voir le transparent précédent).

Injectivité, surjectivité et graphe

Remarque

On peut "voir" les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abscisses des points d'intersection de la dte hor avec le gphique de f.



Ensemble image

Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $\mathrm{Im}\, f$ ou $f(A)$, est l'ensemble des valeurs prises par la fonction. C'est

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}.$$

Attention, l'ensemble image est un ensemble. Pour une fonction à valeurs réelles, par exemple, c'est une partie de $\mathbb{R}$.

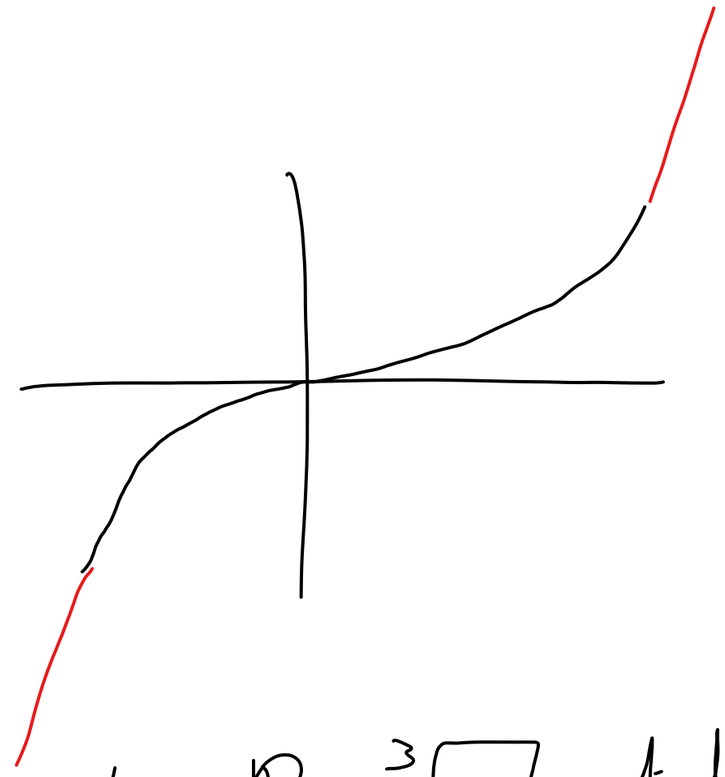
Rq : $f : A \to B$ fct. f est surj si $\mathrm{Im}\, f = B$.

Ensemble image

Exemples:

L'ensemble image de la fonction...

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est $[1, +\infty[$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$ est $[-1, 1]$.

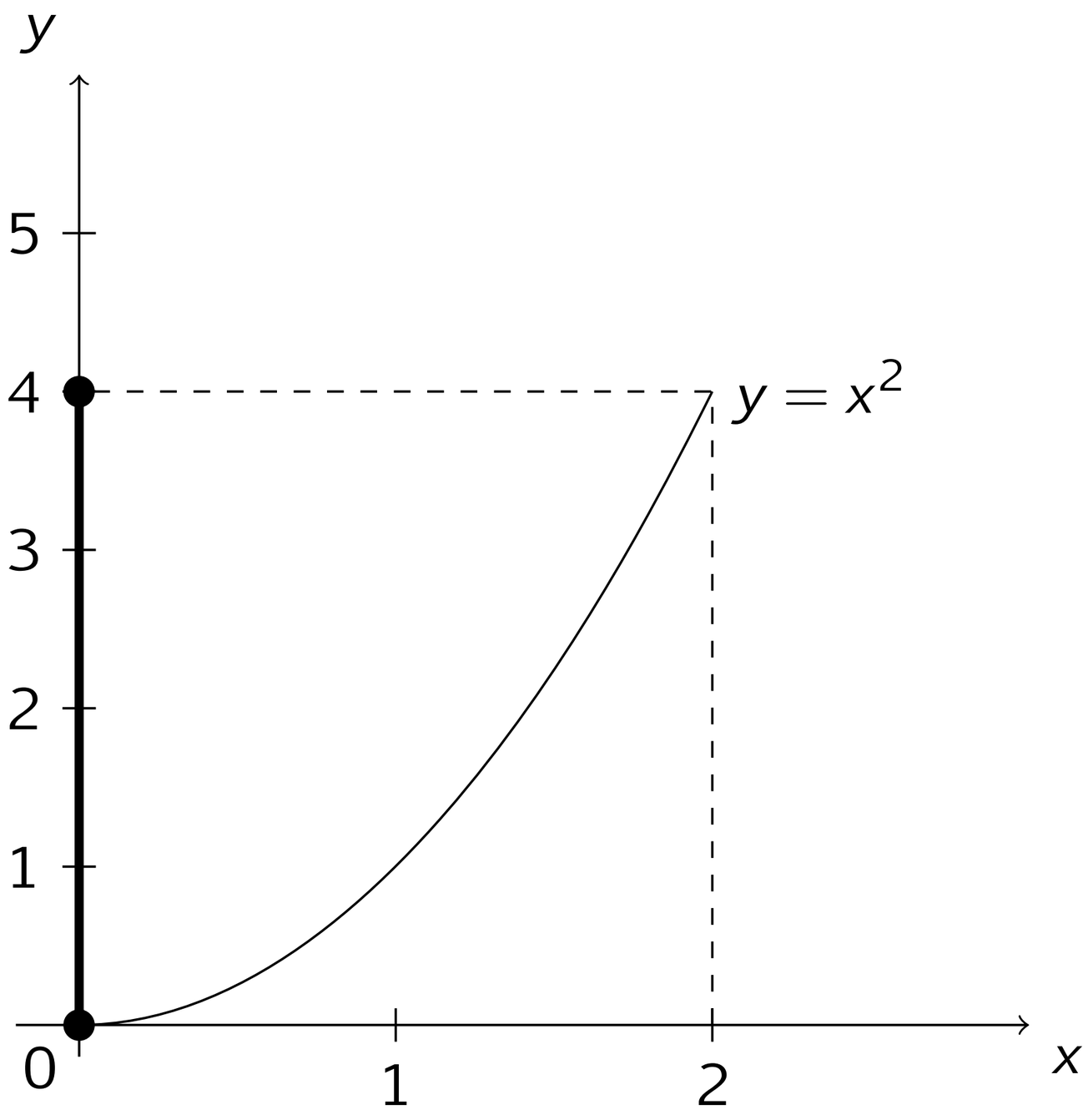


$\forall y \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{y}$ est déf

et $f(\sqrt[3]{y}) = y$

$\forall y \in \mathbb{R} : y \in \mathrm{Im}\, f$.

Le graphe de $[0,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Contenu de la section

Fonctions réciproques
Définitions
Fonctions réciproques
Logarithme et exponentielle
Fonctions trigonométriques réciproques
Continuité des fonctions réciproques

Réciproque

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ opération — la réciproque sert à défaire / inverser cette opération.

Définition

Une fonction $f : A \to B$ est dite *inversible* si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$ et $(f \circ g)(x) = f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$.

La fonction g est appelée l'*inverse ou la fonction réciproque de* f, et se note f^{-1}.

Ecrire que $g(f(x)) = x$ (ou $f(g(y)) = y$) revient à dire que si on applique f à x puis qu'on applique g à la valeur $f(x)$ on retombe sur x: il ne s'est rien passé.

Faites attention aux ensembles où vivent les variables: si on calcule $g(f(x))$ alors $x \in A$, mais si on calcule $f(g(y))$ alors $y \in B$.

$g \circ f : A \to A$ $\qquad$ $f \circ g : B \to B$

Inversible = bijective

Résultat

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est la réciproque de f, alors f est la réciproque de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Preuve de 1.

Soit f une fonction inversible d'inverse g. Alors f est

- *injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.*
- *surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z. Car $f(g(z)) = z$.*

Donc f est bijective. Réciproquement, si f est bijective, alors pour tout $z \in B$ il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent par f, et on appelle cet antécédent $g(z)$.

Fonctions réciproques

↳ Rq : f est injective : $\forall x, y : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ est équivalent à sa "contraposée" $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Graphe de la réciproque

Le résultat précédent (bijective = inversible = $\exists$ réciproque) montre qu'une fonction $f : A \to B$ est inversible si et seulement si pour tout $y \in B$, il existe un et un seul $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
C'est cette valeur de x qui est notée $f^{-1}(y)$. Ou encore:

$$\text{lorsque } f \text{ est inversible,} \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Si $f : A \to B$ est bijective, alors le graphe de sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de f par une symétrie d'axe $x = y$. Autrement dit, en échangeant les valeurs de x et y.

Graphe de f : $\ni (x, f(x)) \iff (f(x), x) \in$ Graphe de f^{-1} ?

Une mise en garde

Attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ (la fonction réciproque appliquée en x) avec $(f(x))^{-1} := 1/f(x)$ qui est l'inverse de $f(x)$!
Dans le premier cas il s'agit d'une fonction qu'on applique à un point, dans le deuxième c'est l'inverse d'un nombre réel (l'image).

Une mise en garde

Exemple

On note $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.

Par contre vous pouvez vérifier que $f^{-1} = f$ et $g^{-1} = g$. La fonction g n'est donc pas la réciproque de f!

$$g(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques
Définitions
Fonctions réciproques
Logarithme et exponentielle
Fonctions trigonométriques réciproques
Continuité des fonctions réciproques

Exemple: logarithme et exponentielle

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \longmapsto e^x$ est bijective.

Rappel: si $x \in \mathbb{R}$ on peut toujours considérer e^x qui est un nombre réel strictement positif.
Si $y > 0$, $\ln y$ (logarithme népérien) désigne l'unique nombre réel tel que

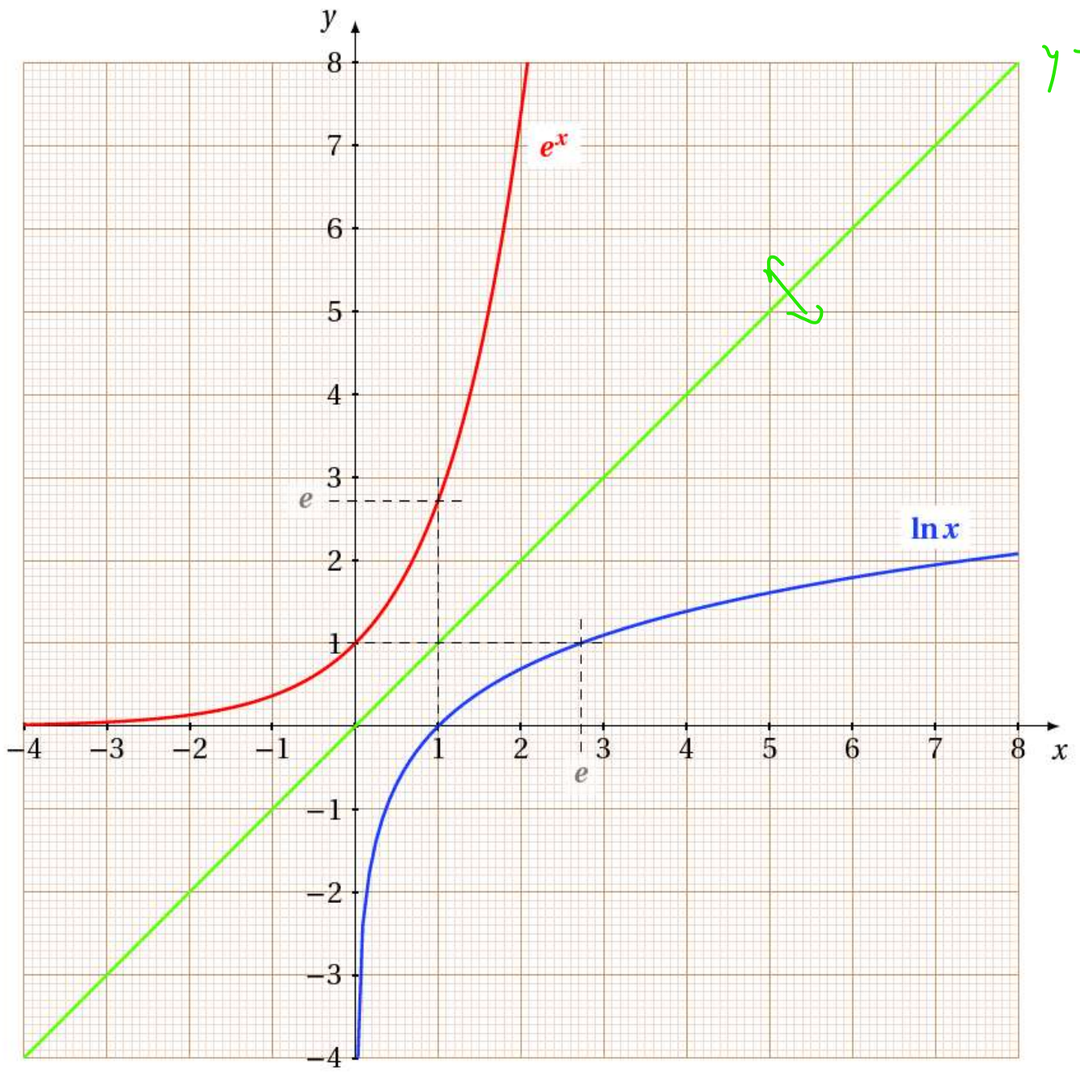
$$e^{\ln(y)} = y.$$

En d'autres termes, $\ln y$ est l'unique antécédent de y pour la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

Ceci montre que la fonction exponentielle $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \mapsto \exp(x)$ est inversible et que la fonction ln est sa réciproque. Ou encore:
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0$

$$\exp(x) = y \iff x = \ln(y).$$

Exemple: logarithme et exponentielle (suite)



On rappelle les limites de ln et exp:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques
Définitions
Fonctions réciproques
Logarithme et exponentielle
Fonctions trigonométriques réciproques
Continuité des fonctions réciproques

Nous avons vu les fonctions sin, cos et tan dans le cours de trigonométrie.

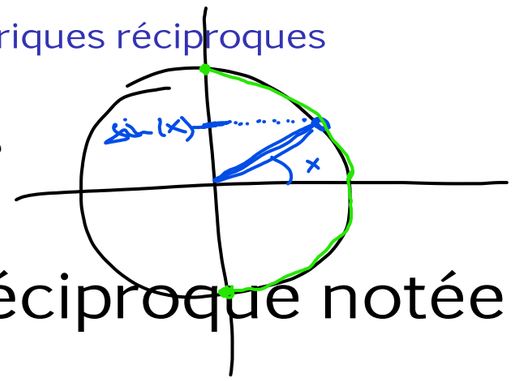
Si on regarde les fonctions sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ces fonctions ne sont jamais bijectives.

Par exemple car $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ et $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$.

$\Rightarrow$ pas inj $\Rightarrow$ pas bij.

Nous allons maintenant voir que si on se limite au départ à des valeurs plus restreintes en x, ces fonctions deviennent inversibles.

est bijective



Réciproque de sin: arcsinus

La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

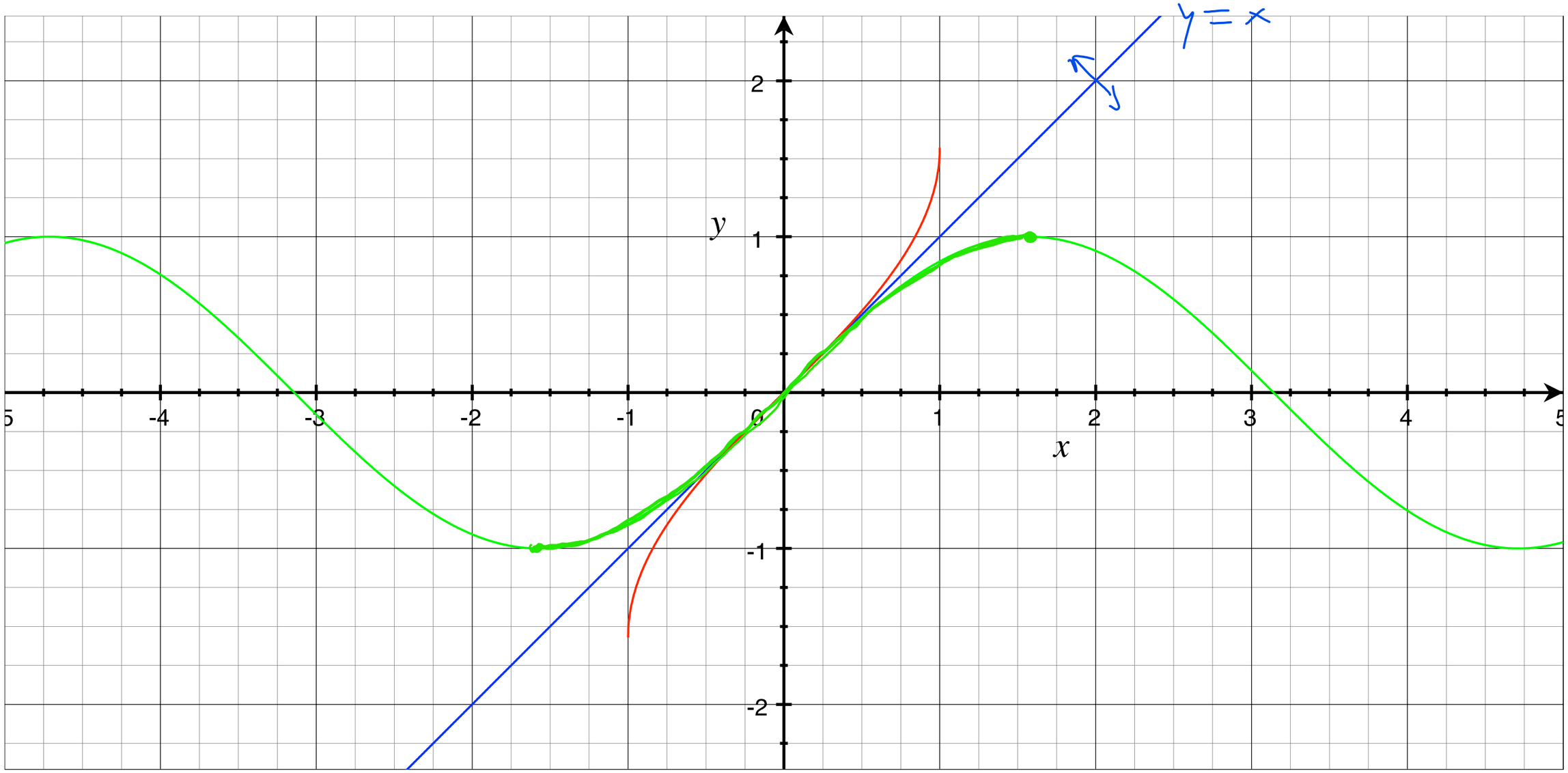


Figure : Graphe de $\sin$ (vert), $\arcsin$ (rouge)

Attention: Il est faux de dire que "sin : $\mathbb{R} \to [-1,1]$ admet une fonction réciproque"!
La fonction sin admet une réciproque seulement sur un intervalle où elle est inversible, c'est-à-dire sur un intervalle où tout élément de l'image a exactement un antécédent. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est un tel intervalle.

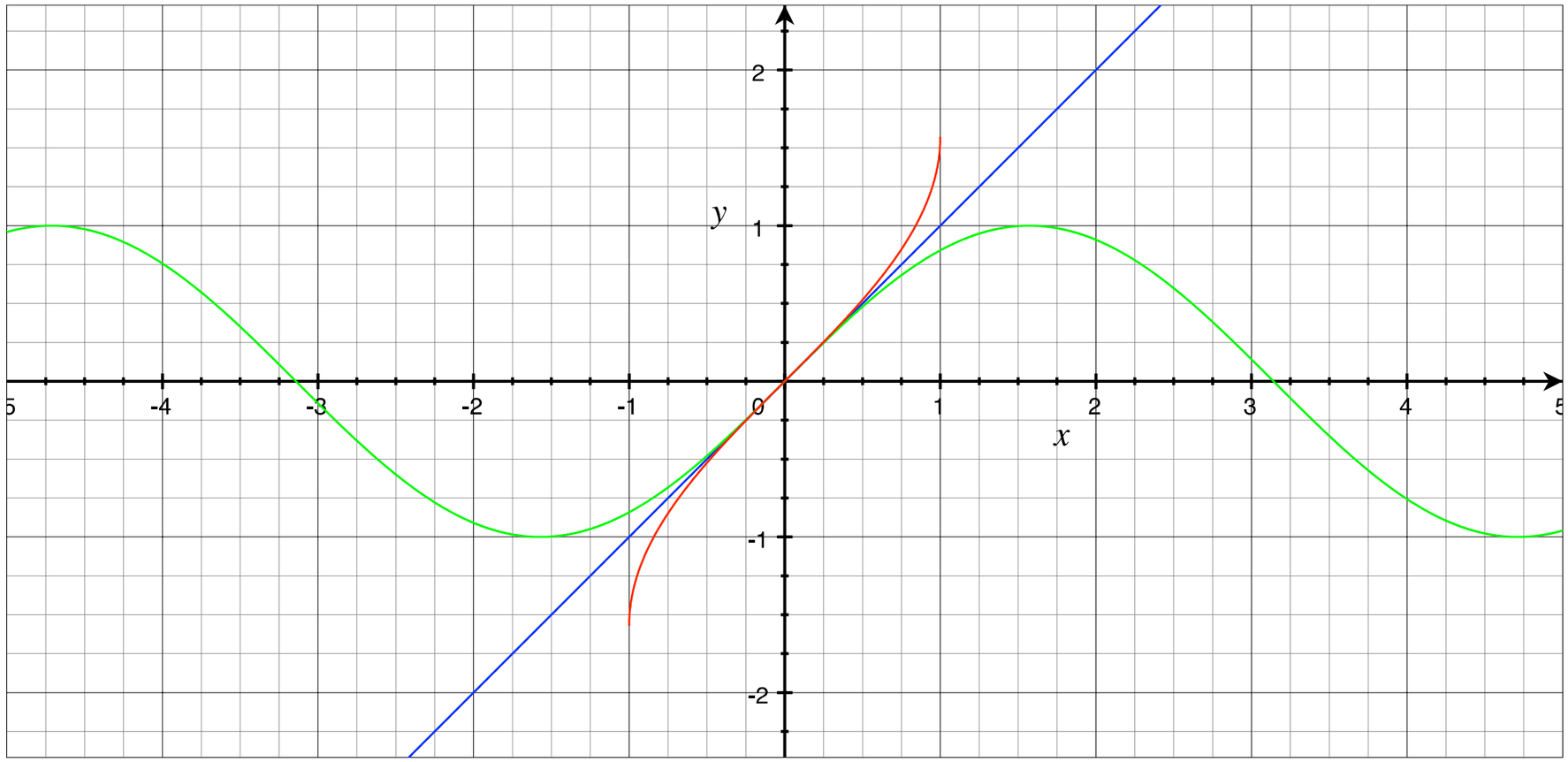


Figure: Graphes de sin (en vert) et arcsin (en rouge)

De la même manière: la fonction sin n'est pas bijective (= inversible) sur $[-\pi, \pi]$!

Réciproque de cos: arccosinus

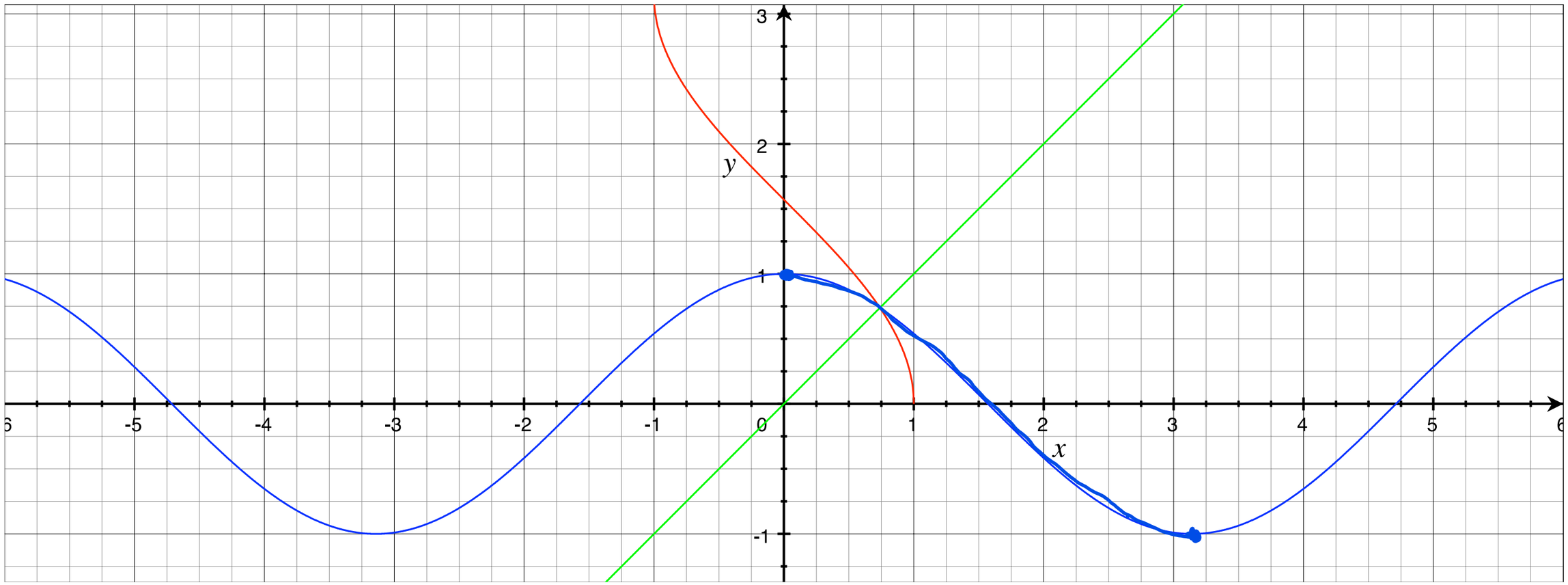


Figure: Graphes de cos (bleu) et arccos (rouge)

Réciproque de cos: Arccosinus

La réciproque de cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Car cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

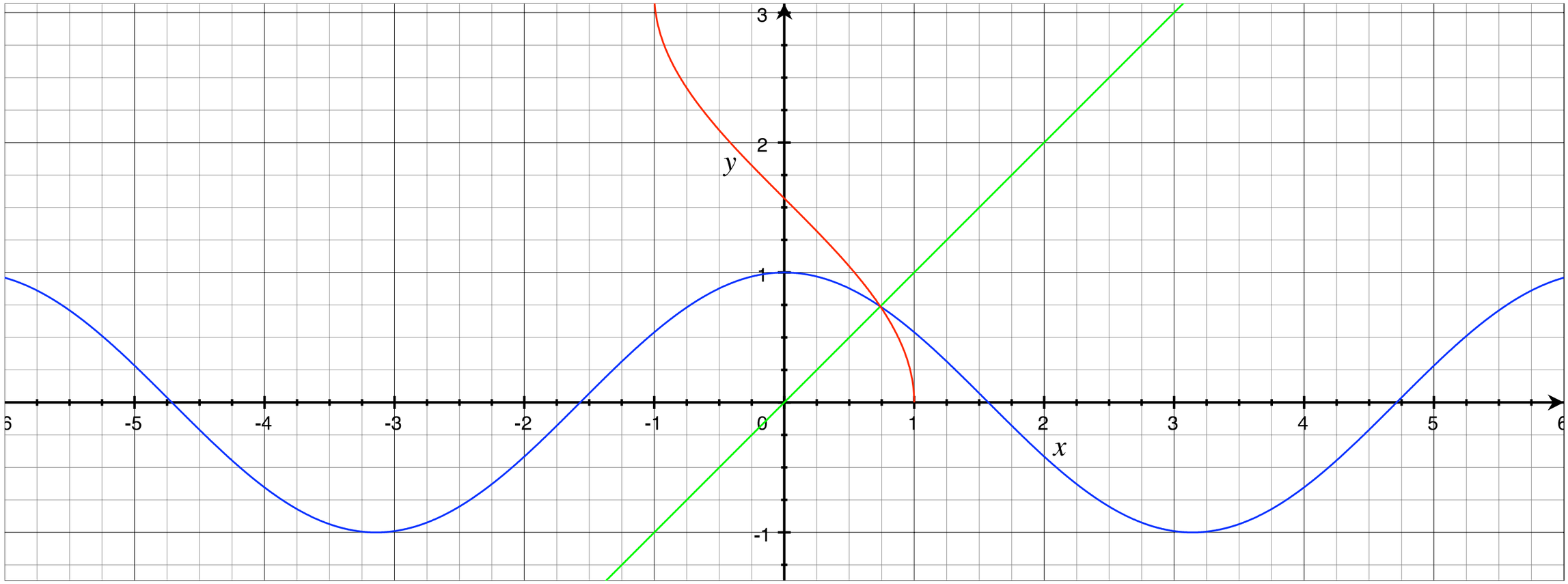


Figure: Graphes de cos (bleu) et arccos (rouge)

La fonction tan

Rappelons la définition donnée dans le cours de trigonométrie:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Cette définition a du sens tant que $\cos(x) \neq 0$, CE c'est-à-dire tant que

CE: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction tan est donc bien définie et continue sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Comme tan est en plus π-périodique, il suffit de l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction tan

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Comme $\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}}\cos(x)=0^+$ et $\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\cos(x)=0^+$ et que $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ et $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ les règles sur les limites donnent:

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}}\tan(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty .$$

Réciproque de tan: arctangente

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$ est une bijection. Sa fonction réciproque est alors notée

$$\operatorname{arctg} :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

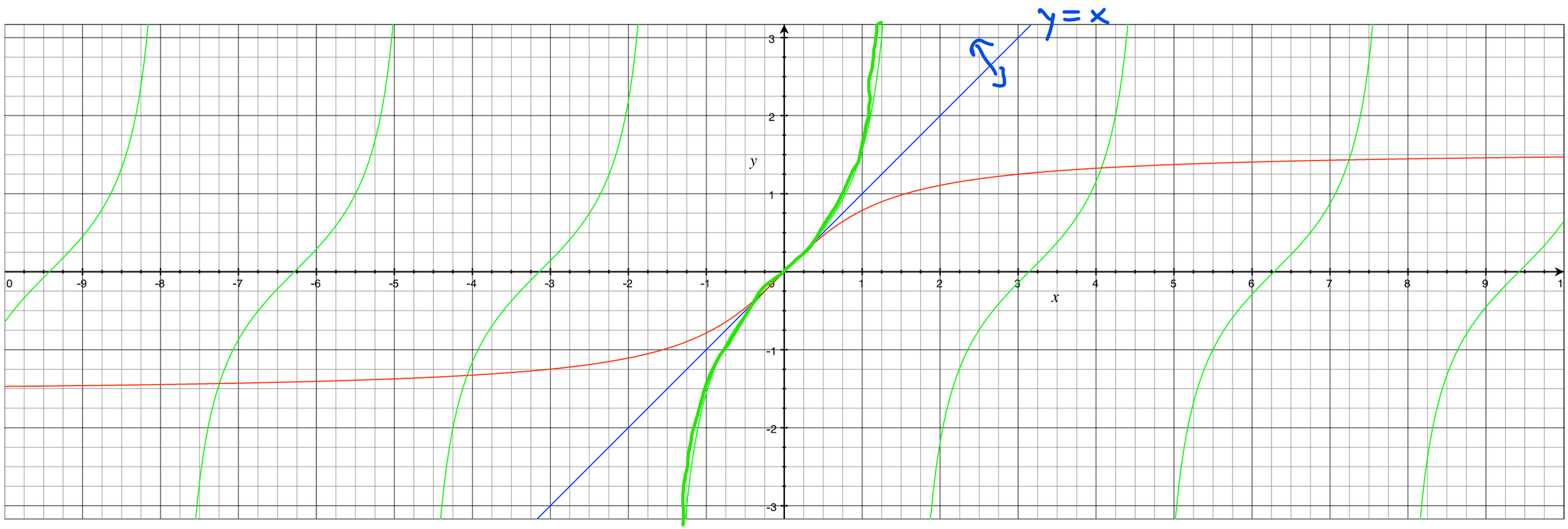


Figure: Graphes de tan (vert) et arctg (rouge)

On peut aussi définir la réciproque de $\operatorname{cotg} :]0, \pi[\to]-\infty, \infty[$.

Contenu de la section

Fonctions réciproques
Définitions
Fonctions réciproques
Logarithme et exponentielle
Fonctions trigonométriques réciproques
Continuité des fonctions réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Résultat

Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a, alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

Attention, ça ne marche plus si f n'est pas définie sur un intervalle!
Par exemple si f est définie sur une union d'intervalles.

En particulier les fonctions arcsin, arccos et arctg sont continues sur leur domaine de définition.

→ Exo : Trouver un exemple de cela.