

Chapitre 1: Notions de base

MATHF117

Une classification des nombres

Les ensembles

Relations entre les nombres

Inégalités et notions d'ordre

Intervalles

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeurs absolues

Puissances

Racines

Logarithmes

Équations, inéquations et systèmes

Polynômes

Notions de géométrie

Repères orthonormés

Théorèmes de Pythagore et Thalès

Une classification des nombres

Naturels, entiers et rationnels

Définition

L'ensemble des **nombre**s naturels, noté $\mathbb{N}$ et souvent appelé simplement l'ensemble des naturels, est l'ensemble de nombres qui permettent de compter : $0, 1, 2, 3, \dots$

Définition

L'ensemble des **nombre**s entiers, noté $\mathbb{Z}$ et souvent simplement appelé l'ensemble des entiers, contient les entiers naturels et leur opposé : $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Définition

Les **nombre**s rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non-nul. Deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont considérés comme étant *égaux* si $ad = bc$. L'ensemble des nombres rationnels est dénoté par $\mathbb{Q}$.

Développement décimal des nombres rationnels

Exemples

► $\frac{1}{2} = 0,5$

► $\frac{1}{3} = 0,33333\dots$

► $\frac{11}{13} = 0,846153846153846153846153\dots$

Proposition

Un nombre rationnel admet un **développement décimal périodique**. Réciproquement, tout nombre admettant un développement périodique est rationnel.

Il existe des nombres qui n'admettent pas de développement décimal périodique.

Exemples

► $\sqrt{2}$

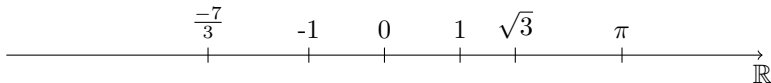
► π



Réels

Définition

L'ensemble des **nombre réels** est l'ensemble de “tous” les nombres qui permettent un développement décimal. Il est dénoté par $\mathbb{R}$.



Les ensembles

Ensembles

Définition

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, qu'on appelle éléments. Si X est un ensemble et x est un élément de X , nous écrivons

$$x \in X$$

se lit

et nous disons

- ▶ x est un élément de X .
- ▶ l'élément x **appartient** à l'ensemble X
- ▶ l'ensemble X **comprend** l'élément x .

Si y n'est pas un élément de X , on note

$$y \notin X.$$

mathématiques
est une collection d'objets distincts

Exemples d'ensembles

Notation

Pour indiquer un ensemble on entoure souvent ses éléments, ou la description de ses éléments par { et }

Exemples

► $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

► $\{0, 1\}$

► $\{\text{bleu}, \text{rouge}\}$

► $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair}\}$

► $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est positif}\}$

► $\{0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$

Définition

Il existe un unique ensemble qui ne ~~comprend~~ aucun élément. Cette ensemble est appelé **l'ensemble vide** et il est noté $\emptyset$.

$\emptyset$

~~$\emptyset$~~

Finitude et cardinalité d'ensembles

Définition

Si X comprend un nombre fini d'éléments, nous disons que X est un **ensemble fini** et nous pouvons donner une liste complète de ces éléments.

Exemples

L'ensemble $\{0, 1\}$ est fini, mais $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini. En effet, il n'est pas possible de lister tous les nombres naturels *en un temps fini*.

Définition

Pour un ensemble fini X , le nombre d'éléments est aussi appelé la **cardinalité** de X . On note $|X|$ ou $\#X$.

Exemple

Si $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ alors $\#X = 6$.

Sous-ensembles

Définition

Soient X et Y des ensembles. Y est un **sous-ensemble** de X si et seulement si tout élément de Y est aussi un élément de X . On note

$$Y \subset X, \text{ ou } Y \subseteq X.$$

Si on veut exprimer qu'un sous-ensemble Y de X est différent de X , on écrit

$$Y \subsetneq X$$

Nous appelons un tel sous-ensemble **strict** ou **propre**. Si X n'est pas un sous-ensemble de Y , on note

$$X \not\subseteq Y.$$

Exemple

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

$$\subsetneq \quad \subsetneq \quad \subsetneq \quad \text{car } -1 \notin \mathbb{N}$$

$$\text{car } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Diagramme de Venn:



$$Y \subsetneq X$$

! Attention

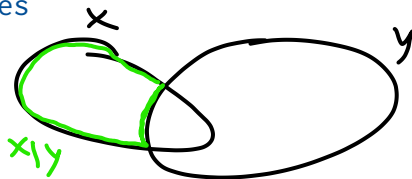
Pas confondre les symboles " $\in$ " et " $\subset$ " !

- ▶ Le premier donne une relation entre des éléments et des ensembles,
- ▶ le deuxième est une relation entre ensembles !

Exemple

- ▶ $2 \in \{2, 3\}$.
- ▶ $\{2\} \notin \{2, 3\}$ *est un ensemble.*
- ▶ $\{2\} \subset \{2, 3\}$.
- ▶ $\emptyset \subseteq S$ pour tout ensemble S .

Opérations d'ensembles



Définition

La **différence** entre des ensembles X et Y est donnée par

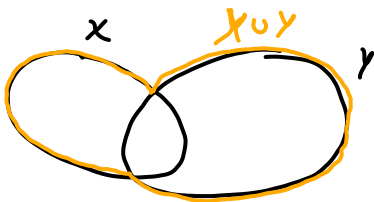
$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

Exemple

Si $X = \{0, 1\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$ alors

$$X \setminus Y = \{0\} \text{ et } Y \setminus X = \{2, 3\}$$

Opérations d'ensembles



Définition

La **réunion**, ou simplement l'**union**, de X et Y est donnée par

$$X \subseteq X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}$$

$$Y \subseteq$$

↳ inclusif: on prend aussi les éléments en commun.

Exemple

Si $X = \{0, 1\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$ alors

$$X \cup Y = \{0, 1, 2, 3\}$$

Opérations d'ensembles

X



Définition

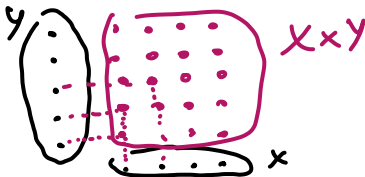
L'**intersection** de X et Y est donnée par

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\} \subseteq X$$
$$\subseteq Y$$

Exemple

Si $X = \{0, 1\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$ alors

$$X \cap Y = \{1\}$$



Définition

Le **produit (cartésien)** de X et Y est l'ensemble de tous les couples d'un élément de X et un élément de Y :

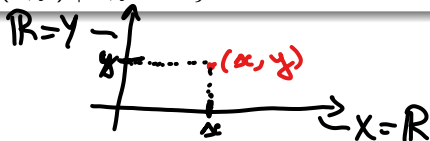
$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

Si $X = Y$

$$X^2 := X \times X = \{(x, x') \mid x \in X \text{ et } x' \in X\}.$$

Exemple

$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est souvent identifié au plan.



Exemple d'un produit cartésien

Exemple

Si $X = \{0, 1\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$ alors

$$X \times Y = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$

Remarque

Pour obtenir le produit cartésien de l'exemple précédent, on peut exécuter le code python ci-dessous.

```
1 X = [0,1]
2 Y = [1,2,3]
3 out = []
4 for x in X:
5     for y in Y:
6         out.append((x,y))
7 print(out)
```

Relations entre les nombres

Inégalités et notions d'ordre

Intervalles

Comparaison des nombres

Soient a et b des nombres réels

Définition

On dit que

- ▶ “ a est **strictement inférieur** à b ”, noté $a < b$, si a est plus petit et différent de b ;
- ▶ “ a est **strictement supérieur** à b ”, noté $a > b$, si a est plus grand et différent de b ;
- ▶ “ a est **inférieur** à b ” (ou “inférieur ou égal”), noté $a \leq b$, si a est plus petit ou égal à b ;
- ▶ “ a est **supérieur** à b ” (ou “supérieur ou égal”), noté $a \geq b$, si a est plus grand ou égal à b .

Exemples de comparaisons de nombres

Exemples

Ces affirmations sont vraies

- ▶ $2 \leq 3$
- ▶ $\frac{1}{2} < 3$
- ▶ $-2 \leq 1$
- ▶ $-2 \leq -1$
- ▶ $2 \leq 2$
- ▶ $2 \geq 2$
- ▶ $5 > 3$
- ▶ $\sqrt{2} < \sqrt{3}$,

Exemples

Ces affirmations sont fausses

- ▶ $2 \geq 3$
- ▶ $-2 \geq 1$
- ▶ $-2 \geq -1$
- ▶ $2 < 2$
- ▶ $2 > 2$
- ▶ $3 > \pi$
- ▶ $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$

Propriétés de la relation d'ordre

Proposition

Pour tous réels a, b, c , nous avons :

- ▶ Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (propriété d'anti-symétrie)
- ▶ Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (propriété de transitivité).

Exemple

Si $2 \leq 5$ et $5 \leq 10$ on a bien $2 \leq 10$.

Règles de calculs des inégalités

Proposition

Soient a, b des nombres réels tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel c nous avons

$$a + c \leq b + c.$$

De plus, si $c \geq 0$, on a

$$ac \leq bc.$$

Si $c < 0$ alors

$$ac \geq bc.$$

Exemples

- ▶ $1 \leq 2$ donc en ajoutant 2 on a $3 \leq 4$
- ▶ $1 \leq 2$ donc en multipliant par 2 on a $2 \leq 4$
- ▶ $1 \leq 2$ donc en multipliant par -1 on a $-1 \geq -2$

L'inégalité change de sens !

Règles de calcul des inégalités

Proposition

Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

↓
~~on garde $a \leq b$ et $c \leq d$~~ $ac \leq bd$.

Preuve.

On passe pour le moment.



Intervalles

Un intervalle est un ensemble de nombres réels “sans trou”

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

- ▶ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
- ▶ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;
- ▶ $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
- ▶ $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- ▶ $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$;
- ▶ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
- ▶ $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- ▶ $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- ▶ $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

+ est sous-entendu

a et $-\infty$ sont la **borne inférieure**

b et ∞ sont la **borne supérieure**

Exemples d'intervalles

Exemples

Les ensembles suivants sont des intervalles

- L'ensemble de nombres réels positifs

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} = [0, +\infty[$$

- L'ensemble de nombres réels strictement positifs

$$\mathbb{R}_{\bullet}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\} =]0, +\infty[$$

- $\{4\} = [4, 4]$

Exemple

L'ensemble des réels non-nuls : $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle.

C'est une réunion de 2 intervalles :
 $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

Infinis, mais bornés

À l'exception des ensembles de la forme $[a, a]$, les intervalles sont des ensembles infinis.

Exemple

$[0, 1]$ contient $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Ils sont par contre souvent **bornés** (supérieurement ou inférieurement).

Manipulation et opérations sur les nombres

Sommes

Valeurs absolues

Puissances

Racines

Logarithmes

Symbole de sommation

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ?

Définition (Symbole de sommation)

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

→ se lit "Somme pour k allant de m à n des termes a_k "

Symbole de sommation

Il s'agit juste d'une notation concise pour écrire les sommes.

Exemples

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} k &= \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{2}_{k=2} + \dots + \underbrace{100}_{k=100} \\ \sum_{k=1}^{100} k^2 &= \underbrace{1}_{\substack{\text{si } k=1, k^2=1 \\ = a_1}} + \underbrace{4}_{\text{si } k=2, k^2=4} + 9 + \dots + 10000 \\ &\quad \underbrace{k=100}_{a_{100}=100^2=10000} \\ \sum_{k=5}^{10} (k-1) &= \underbrace{4}_{\text{si } k=5, k-1=4} + \underbrace{5}_{k=6, k-1=5} + 6 + 7 + 8 + 9 \end{aligned}$$

Handwritten notes:
- $a_k = k$ (green)
- $a_k = k^2$ (green)
- $a_k = k-1$ (green)

Exemples de sommation

Exemples

► $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3$

$a_i = 1$ quel que soit i

► $\sum_{i=1}^{10} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

► $\sum_{i=5}^2 i =$
exo

Somme comme boucle for

Remarque

Si on veut calculer par exemple $\sum_{i=1}^{100} i^2$, on pourrait écrire le code suivant en python.

```
1 out = 0
2 for i in range(1,101):
3     out += i*i
4 print(out)
```

Ce programme imprimera alors $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 338350$.

Propriétés de la somme

Proposition

Σ est juste 1 notation !
Toutes les propriétés de + restent vraies.

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

exit () et garde terme en a et b.

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^n b_k \right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{associativité} \\ \text{commutativité} \end{array} \right]$$

$$\lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \dots + \lambda a_n = \sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k = \lambda (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)$$

distributivité

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{n+m-k}$$

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1} + a_m$$

.

La somme des n premiers naturels

Proposition

$$\underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{2}_{k=2} + 3 + \dots + \underbrace{n}_{k=n} = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve.

↳ Reportée à plus tard.



Définition de la valeur absolue

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples

► $|5| = 5$
car $5 \geq 0$

► $|-5| = -(-5) = 5$
car $-5 < 0$

► $|0| = 0$
car $0 \geq 0$.

Proposition

Pour tous x, y , nous avons

$$y - x = -(x - y)$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x - y| = |y - x|$$

Remarque

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ peut s'interpréter comme la distance de x à y sur la droite réelle



La proposition affirme donc que la distance de x à y est égale à la distance de y à x .

Notation du produit

Notation

En général, la multiplication est sous-entendue quand deux symboles se suivent

- ▶ ab veut dire “ a fois b ”
- ▶ $3x$ veut dire “3 fois x ”

Ceci ne marche pas entre deux nombres, donc on utilise $\cdot$

- ▶ “3 fois 5” est noté $3 \cdot 5$ (et pas 35)
- ▶ On n'utilise pas 3×5

Réels à puissances naturelles

Définition

Pour tout réel x , la notation x^b (lire : “ x **exposant** b ”, ou “ x à la **b^{e} puissance**”) a le sens suivant, lorsque b est un entier naturel :

$$x^b := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Avec comme cas particulier : $x^0 = 1$.



Ne pas confondre avec la fonction exponentielle en base $a \in \mathbb{R}_0^+$: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a^x$

Exemples

► $2^2 = 4$

► $3^3 = 27$

► $(-1)^{2025} = -1$

► $(-2)^2 = 4$

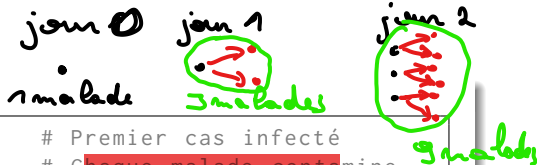
► $(-3)^3 = -27$

► $(-1)^{2026} = 1$

$$\underbrace{(-1)(-1)(-1)(-1) \dots}_{\text{1}}$$

Propagation d'un virus

Exemple



```
1 cas_initiaux = 1 # Premier cas infecté
2 taux_transmission = 2 # Chaque malade contamine
  2 personnes
3 jours_simulation = 5 # Durée de la simulation
4 total_cas = cas_initiaux
5 print("Jour\tTotal_Cas")
6 for jour in range(1, jours_simulation + 1):
7     nouveaux_cas = total_cas * taux_transmission
8     total_cas += nouveaux_cas
9     print(f"{jour}\t{total_cas}")
```

L'output est donné par :

Jours	Total Cas
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

Le nombre de cas lors du jour n est donné par 3^n .

Réels non-nuls à puissances entières

Définition

Soient b un naturel et x un réel non nul, alors on définit

$$x^{-b} := \frac{1}{x^b}. \quad \text{C'est l'inverse de } x^b.$$

On a alors défini x^b pour tout entier b .

Exemple

$$\blacktriangleright 1^{-3} = 1$$

$$\blacktriangleright 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{" " } \frac{1}{(-2)^2}$$

Règles de calculs de puissances

calcul avec $a \in \mathbb{N}$

Proposition

Pour tous réels x, y non nuls et pour tous entiers a, b , nous avons

1. $x^a y^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{a \text{ fact}} = \underbrace{(xy) \cdot (xy) \cdot \dots \cdot (xy)}_{a \text{ fact}} = (xy)^a$
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Pour le dernier point, on doit supposer que $a \geq b$, sinon $a - b$ n'est pas naturel.

Racine carrée

Définition

Si t est un **réel positif ou nul**, sa **racine carrée**, notée $\sqrt{t}$, est l'unique réel **positif ou nul** dont **le carré vaut t** .

Exemples

► $\sqrt{9} = 3$

► $\sqrt{2} = 1,414213562373 \dots$

► $\sqrt{2,25} = 1,5$

Remarque



Pourquoi une telle valeur existe-t-elle toujours ?

Pas une question évidente $\rightarrow$ propriété de la borne supérieure

On a donc par définition que

$$(\sqrt{t})^2 = t$$

⚠ $(-\sqrt{t})^2 = t$

Opposée de la racine carrée

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement **deux** nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$. Le premier est positif, le second est négatif.

! Attention

On parlera de **la** racine carrée d'un nombre positif, qui est un nombre positif. Il n'y a pas d'ambiguïté.

Racine n^e

On se lit "n-ième"

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa **racine n^e** , notée $\sqrt[n]{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont la puissance n^e vaut t .

Exemples

► $\sqrt[3]{27} = 3$

► $\sqrt[7]{128} = 2$

La racine 3^e est la racine cubique.

On a donc par définition que

$$(\sqrt[n]{t})^n = t$$

Réels positifs à puissances rationnelles

Définition

Soient b un entier non-nul et x un réel strictement positif. Alors on définit

$$x^{\frac{1}{b}} := \sqrt[b]{x}.$$

On a donc défini x^y pour tout rationnel y .

Exemple

On a $256^{\frac{1}{8}} = 2$

$$x^{\frac{a}{b}} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a = \sqrt[b]{x^a}$$

$a, b \in \mathbb{Z}$
 $b \neq 0$

Remarque

Les règles de calculs de puissances tiennent également pour des puissances a, b rationnelles. On a donc en particulier

$$(\sqrt[n]{t})^n = \left(t^{\frac{1}{n}}\right)^n = t^{\frac{n}{n}} = t^1 = t$$

Définition du logarithme

Définition

Soient x et a des réels strictement positifs. Supposons $a \neq 1$. Le **logarithme (de base a)** d'un nombre x , donne la *puissance* y à laquelle on doit élever a pour obtenir x . On dénote cette valeur par $\log_a(x)$. En d'autres mots, on a

$\log_a(x) = y$ si et seulement si $a^y = x$.
→ "le log c'est l'exposant !" ⚠ à la base.

Exemple

- ▶ $\log_2(16) = 4$ car $2^4 = 16$
- ▶ $\log_{10}(0,01) = -2$ car $10^{-2} = 0,01$
- ▶ $\log_{10} 1000 = 3$ car $10^3 = 1000$
- ▶ $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$
∀ $a > 0$ et $a \neq 1$.

Propagation d'un virus: continué

Exemple

Revenons sur l'exemple du virus où chaque malade contamine 2 personnes tous les jours.

S'il y a 19683 malades, on est à quel jour du virus ?

Le jour n , il y a 3^n infectés.

On veut donc trouver n tel que $3^n = 19683$. $\Leftrightarrow \log_3(3^n) = \log_3(19683)$

Le nombre de jours écoulés $= \log_3(19683) = 9$.

Règles de calculs de logarithmes

Proposition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 et x, u des réels strictement positifs et y un réel. Alors

1. $a^{\log_a(x)} = x$ aussi $\log_a(a^x) = x$

2. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

3. $\log_a(xu) = \log_a(x) + \log_a(u)$

Rq: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

4. $\log_a\left(\frac{x}{u}\right) = \log_a(x) - \log_a(u)$

$x \cdot \frac{1}{u} = x \cdot u^{-1}$

Exemples

► $2^{\log_2(8)} = 8$ prop 1.

► $\log_2(8^2) = 2 \log_2(8) = 2 \cdot 3 = 6$

► $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8)$

► $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2(1) - \log_2(8) = -3$

Formule de changement de base de logarithme

Proposition

Soient a, b des réels strictement positifs et différents de 1 et x un réel strictement positif. Alors

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Exemple

$$\text{On a } \log_{100}(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(100)} = \frac{\log_{10}(x)}{2}.$$

Preuve.

On reporte à plus tard.



Équations, inéquations et systèmes

Exemples d'équations

Définition

Une **équation** est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues.

Résoudre une équation = déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour la quantité inconnue de sorte que l'égalité soit vérifiée.

Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation. L'ensemble de solutions est souvent dénoté S .

Exemple

- ▶ $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$. $S = \{2\}$.
- ▶ $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$: $S = \{-1, 1\}$.
- ▶ $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres. Par exemple $x = \pi$. En fait, $S = \{k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$.
- ▶ $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans les nombres réels, $S = \emptyset$.

Exemples d'équations à deux variables

Exemple

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{array}} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{array} \right\}$$

L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont x et y) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0, 0)\}$.

Exemple

$$\Rightarrow y^2 = -x$$

L'équation $x + y^2 = 0$ possède une infinité de solutions : pour chaque nombre réel r , les valeurs $y = r$ et $x = -r^2$ fournissent une solution. On peut noter $S = \{(-r^2, r) \text{ tel que } r \in \mathbb{R}\}$.

Définition

Un **système d'équation** est la donnée de plusieurs équations.
Résoudre le système = déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour les inconnues qui vérifient *toutes les équations*.

Exemple

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont (x, y) :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ligne 1} + \text{Ligne 2} \\ 2x = 4 \end{array}$$

Les solutions sont $x = 2$ et $y = -1$. Il y a une unique solution.
 $S = \{(2, -1)\}$.

Exemple

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont (x, y) :

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ligne 1} + \text{Ligne 2} \\ 2x = 4 \end{array}$$

En résolvant, on trouve $x = 2$ et $y^2 = 1$. Dès lors il y a deux possibilités :

- Soit $x = 2$ et $y = 1$,
- soit $x = 2$ et $y = -1$.

Il y a donc ici deux solutions !

Ex:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

→ pas de solution

Polynômes

Définition de polynôme

Définition

Un **polynôme en X** est une expression de la forme

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

(Handwritten green annotations: a green arrow points from X^0 to a_0 , and a green circle is drawn around a_0 .)

où $n \in \mathbb{N}$ est le **degré** du polynôme, et les $a_i \in \mathbb{R}$. Un tel polynôme sera dès fois noté $P(X)$.
(Handwritten green note: "si $a_n \neq 0$ ")

Exemple

- ▶ $X + 3$ est un polynôme de degré 1
- ▶ -7 est un polynôme de degré 0
- ▶ $X^2 + X - 1$ est un polynôme de degré 2.

▶ 0 est un polynôme de degré $-\infty$
(convention)

$$X^m \cdot X^n = X^{m+n}$$

$$X^m \cdot 0 = 0$$

Racines de polynômes

Définition

Une **racine réelle** d'un polynôme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ est une solution à l'équation

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$$

Exemple

- ▶ $X + 3$ possède une racine : $X = -3$
- ▶ -7 ne possède aucune racine
- ▶ $X^2 - 1$ possède deux racines : $X = 1$ et $X = -1$.

Racines de polynômes de degré 2

Proposition

Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, alors toute racine réelle de P est de la forme $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si $b^2 - 4ac \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, P ne possède pas de racines réelles. Δ ou φ

Exemple

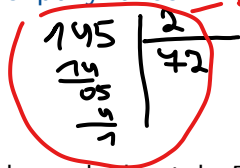
► $X^2 + X - 2$ possède deux racines :

1. $X = \frac{-1 + \sqrt{1+8}}{2} = 1$

2. $X = \frac{-1 - \sqrt{1+8}}{2} = -2$

► $X^2 + X + 2$ ne possède pas de racines, car $1 - 8 < 0$.

Division Euclidienne pour les polynômes


$$\begin{array}{r} 3 \\ 42 \overline{) 145} \\ \underline{126} \\ 19 \\ \underline{168} \\ 27 \\ \underline{252} \\ 23 \end{array}$$

adaptable au polynôme.
ex) $145 = 3 \cdot 42 + 17$

Proposition

Soient P_1, P_2 deux polynômes tels que le degré de P_1 est plus grand ou égal au degré de P_2 alors ils existent deux polynômes (uniques!) Q, R tel que le degré de R est strictement inférieur au degré de Q et

$$P_1 = QP_2 + R.$$

Exercice

Coder l'algorithme de la division Euclidienne en Python (ou SageMath).

Exemple

La division de $X^4 = X^4 + 0X^3 + 0X^2 + 0X + 0$ par $X + 1$ donne :

$$\begin{array}{r} X^4 \\ X^4 + X^3 \\ \hline \cancel{0X^4} - X^3 \\ -X^3 - X^2 \\ \hline +X^2 \\ X^2 + X \\ \hline -X \\ -X - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$X^3(X+1)$

$$\begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 + X - 1 \end{array}$$

le reste

$$\Rightarrow X^4 = (X+1)(X^3 - X^2 + X - 1) + 1$$

Factoriser polynômes

Proposition

de degré $n \geq 1$

Soit $P(X)$ un polynôme. Alors $t \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement s'il existe un polynôme $Q(X)$ de degré $n - 1$ tel que

$$P(X) = (X - t)Q(X).$$

Preuve.

Reportée à plus tard.



Racines de polynômes de degré ≥ 3

Exemple

$$P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2.$$

On voit que -1 est racine. $\rightsquigarrow (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$

Par la Proposition sur le slide précédent $X+1$ divise P :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 - X + 2 & X + 1 \\ \hline -X^3 - X^2 & \\ \hline -3X^2 - X & \\ 3X^2 + 3X & \\ \hline 2X + 2 & \\ -2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X + 1)(X^2 - 3X + 2).$$

Les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2.

Donc $P(X) = (X + 1)(X - 1)(X - 2)$ et ses racines sont $-1, 1, 2$.

Polynômes irréductibles

Définition

Un polynôme est **irréductible** s'il est non constant et ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes non constants.

Proposition

Les polynômes irréductibles sont exactement la réunion des polynômes de degré 1 avec l'ensemble des polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine (ne s'annulant pas).

↳ ex. $X^2 + 1$

Polynômes irréductibles

Exemple

Les polynômes suivants sont irréductibles :

$$X, X - 1, 3X + 5, X^2 + 1, X^2 + 2X + 2, \dots$$

tandis que ceux-ci ne le sont pas : $(X^2+1)(X^2+1)$

$$\underbrace{X^2 - 1}_{(X-1)(X+1)}, \underbrace{(X^2 + 1)^2}, 3X^4 + 2X + 1, X^4 + 1.$$

Remarque

Tout polynôme de degré au moins égal à 3 est factorisable.

Mais ces polynômes n'ont pas forcément une racine : $X^4 + 1$ n'a pas racines réelles. Mais

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}x + 1)(X^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

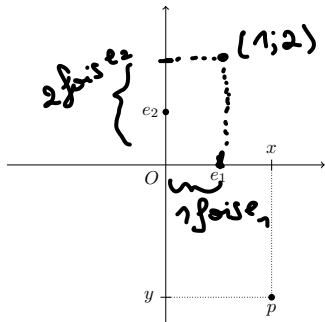
Notions de géométrie

Repères orthonormés

Théorèmes de Pythagore et Thalès

Repères orthonormés

$$q = (1; 2)$$



Définition

Un **repère orthonormé** ou **cartésien du plan** est la donnée de trois points : O (l'**origine**), e_1 et e_2 , tels que

- ▶ e_1 et e_2 sont à distance 1 de O
- ▶ les droites Oe_1 (axe des **abscisses**) et Oe_2 (axe des **ordonnées**) forment un angle droit.

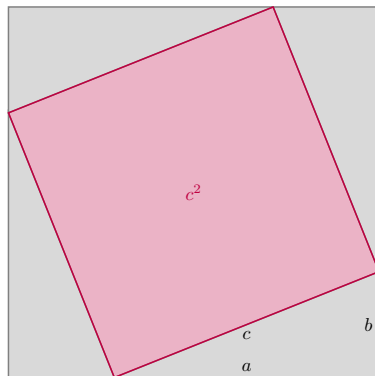
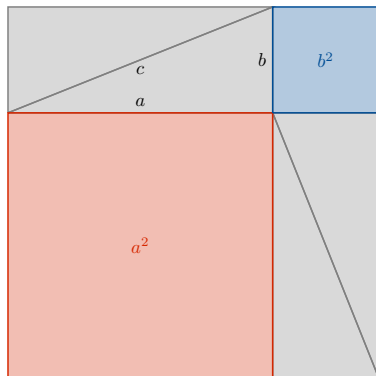
Les points p du plan $\longleftrightarrow$ les couples $(x; y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
Le plan $\longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

Théorème de Pythagore

Théorème

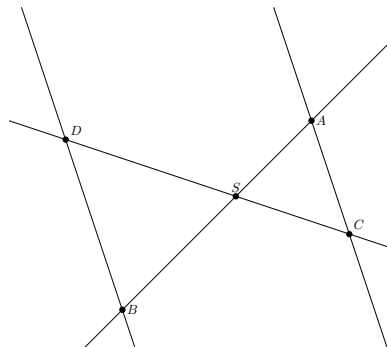
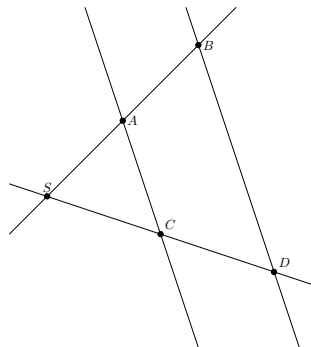
Si A, B, C est un triangle rectangle en C alors

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2.$$



$$\uparrow a^2 + b^2 = c^2 \uparrow$$

Théorème de Thalès



Théorème

- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|AB\|} = \frac{\|SC\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SB\|}{\|AB\|} = \frac{\|SD\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|SB\|} = \frac{\|SC\|}{\|SD\|} = \frac{\|AC\|}{\|BD\|}$.