

Chapitre 2: Trigonométrie

MATHF117

La notion d'angle

Le radian

Angles orientés et cercle trigonométrique

Fonctions trigonométriques

Retrouver un angle en partant du sinus

Angles associés

Fonctions trigonométriques dans les triangles

Triangles rectangles

Triangles quelconques

Formules de sommes d'angles

D'autres identités remarquables

La notion d'angle

Le radian

Angles orientés et cercle trigonométrique

La trigonométrie est l'étude des triangles.

Les liens entre

- ▶ la mesure des côtés
- ▶ et la mesure des angles.

Question

Comment mesurer les angles ?

Angle comme fractions de tours complets

Intuitivement, un angle exprime une fraction de "faire un tour complet"

On fixe deux unités : le **degré** et le **radian**.

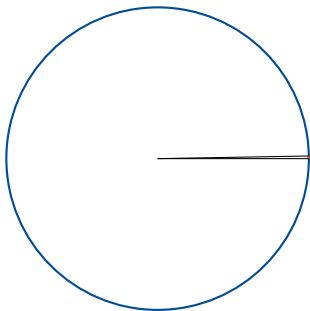
	quart de tour	demi tour	tour complet	deux tours
degrés	90°	180°	360°	720°
radians	$\frac{\pi}{2}\text{rad}$	πrad	$2\pi\text{rad}$	$4\pi\text{rad}$

Conversion: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

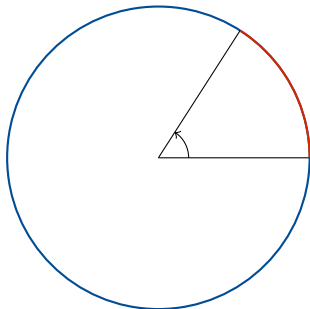
$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$ et $\frac{2\pi \text{ rad}}{360} = 1^\circ$

Radian vs degré

Un degré



Un radian



! Attention

Notre unité par défaut est le *radian*.

Détermination principale

Définition

La **mesure** d'un angle est un réel α entre 0 et 360 (en degrés), ou un réel entre 0 et 2π (en radians), indiquant la proportion d'un tour complet. Un tel réel s'appelle la **détermination principale** de l'angle considéré.

Remarque

Les angles

- ▶ π (un demi de tour)
- ▶ $2\pi + \pi = 3\pi$ (un tour et demi)

sont "équivalents". Ils ont la même détermination principale.

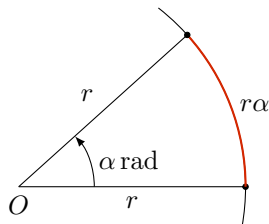
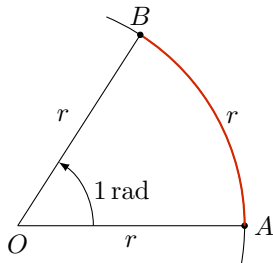
d'autres réels déterminent
la "mê" prop de tour
complet

qui vaut π .

Interprétation géométrique du radian

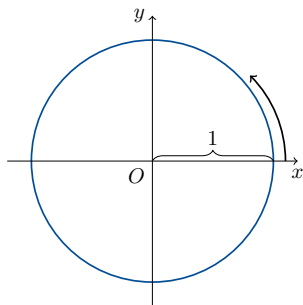
angle mesure 1 radian $\Rightarrow$ arc de cercle de rayon r intercepté par l'angle est de longueur r .

angle mesure α radians $\Rightarrow$ arc de cercle de rayon r intercepté par l'angle est de longueur $r\alpha$.



Donc angle de $2\pi \Rightarrow$ circonférence de $2\pi r$!

Cercle trigonométrique



Définition

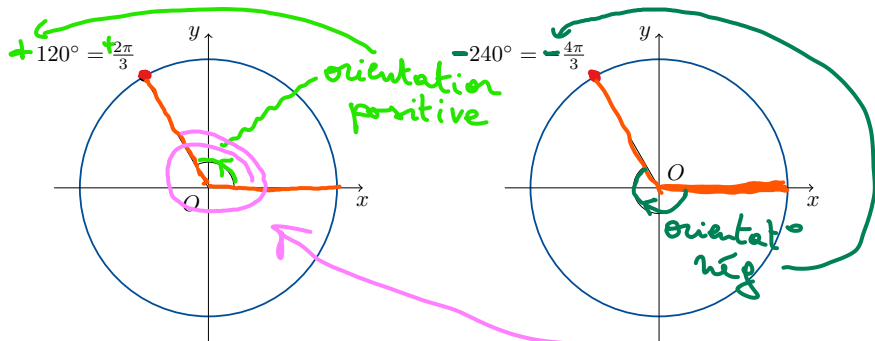
Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est

- ▶ de centre O est l'origine du repère
- ▶ de rayon vaut 1
- ▶ orienté positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'**orientation** du cercle va nous permettre de distinguer de tourner "dans un sens" ou dans "l'autre sens"

Angles orientés sur le cercle trigonométrique

On représente des **angles orientés** dans le cercle trigonométrique



Le point sur le cercle est appelé le point image de l'angle.

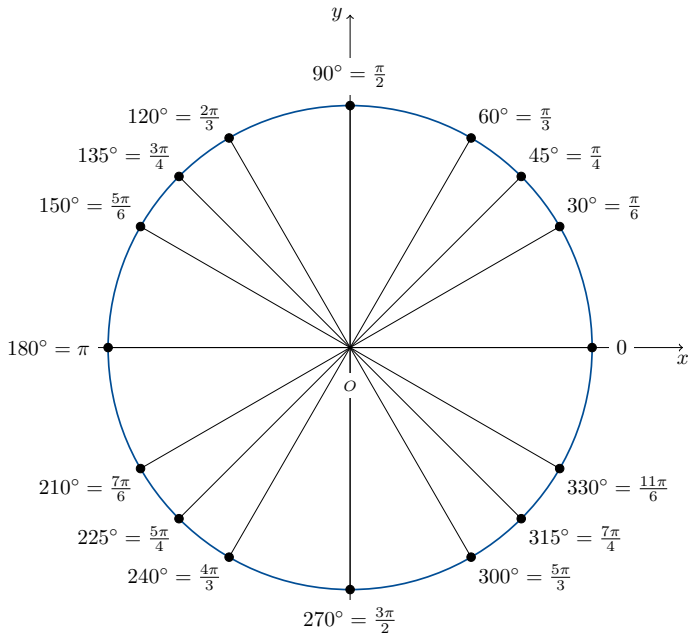
Proposition

mesure en radian .

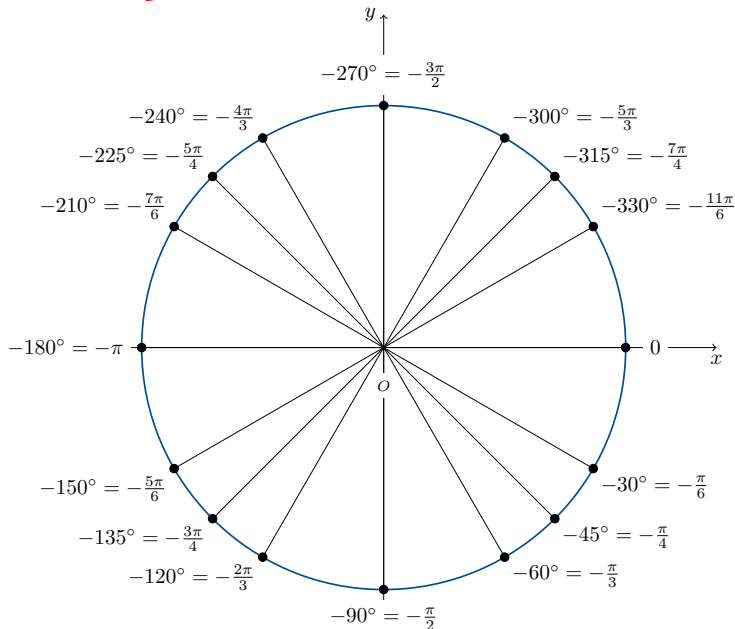
Deux angles orientés α et β ont le même point image si et seulement il existe un nombre entier k tel que $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$.

“ α et β sont les m^{es} à 1 certains nb de tours complets”.

Angles communs positifs



Angles communs négatifs

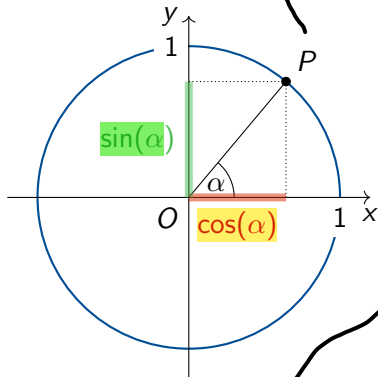


Fonctions trigonométriques

Sinus, cosinus, tangente et cotangente

a des coord. abscisse et ordonnée.
(P_x, P_y)

Soit α un angle de point image P sur le cercle trigonométrique.

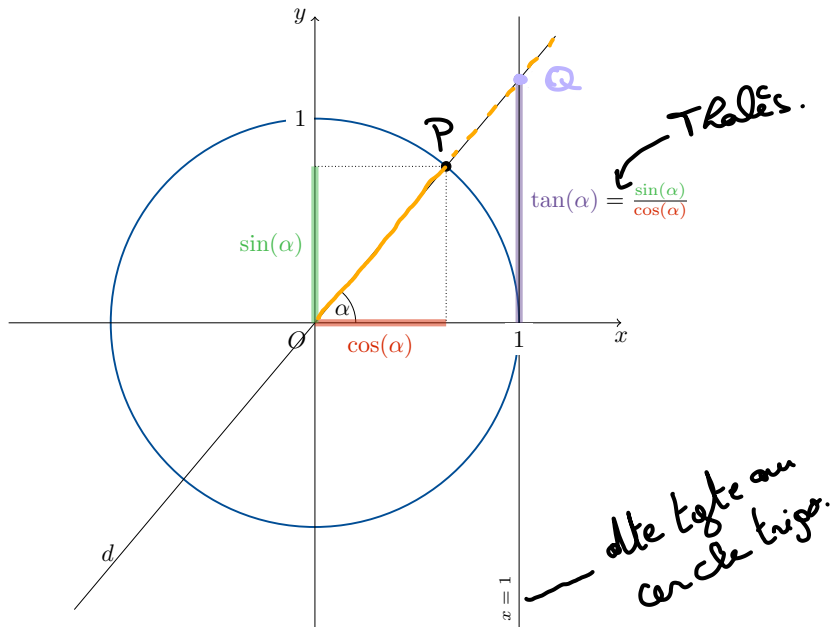


Définition

- ▶ Le **cosinus** de α , $\cos(\alpha)$ est l'abscisse de P .
- ▶ Le **sinus** de α , $\sin(\alpha)$ est l'ordonnée de P .
- ▶ Si $\cos(\alpha) \neq 0$, la **tangente** de α , est $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
- ▶ Si $\sin(\alpha) \neq 0$, la **cotangente** de α est $\cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

peut aussi être noté $\operatorname{tg}(\alpha)$
... .. $\operatorname{ctan}(\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\alpha)$

Interprétation géométrique de la tangente



Interprétation géométrique de la cotangente

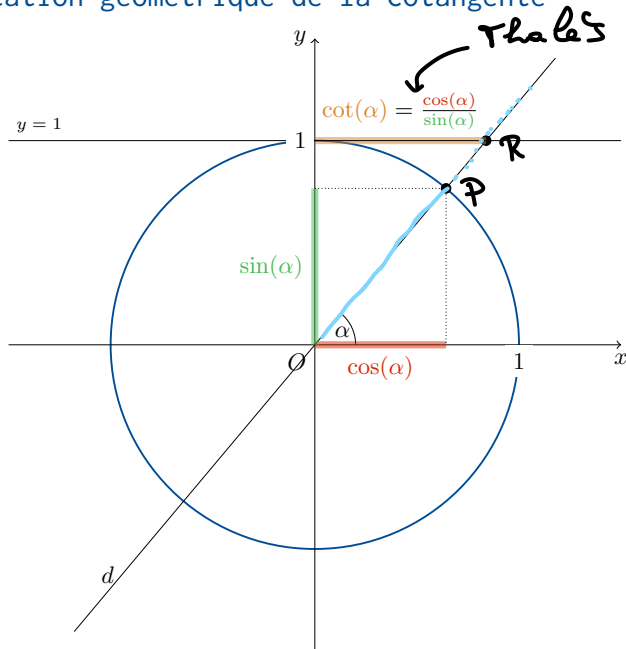


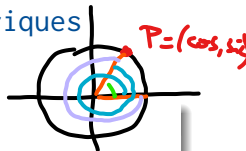
Tableau de valeurs particulières

angle	sin	cos	tan	cot
0	$\sqrt{0}/2 = 0$	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2 = 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$	0	$\nexists$	0

! Attention

Ce tableau est à connaître par cœur.

Propriétés de base des fonctions trigonométriques



Proposition

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et angle $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

Proposition

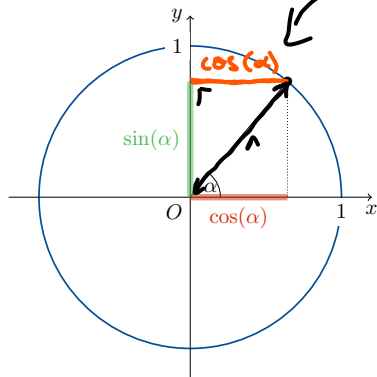
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle alors

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

coord d'un pt sur le
cercle de rayon 1
centré en O.

Relation fondamentale trigonométrique



Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Convention

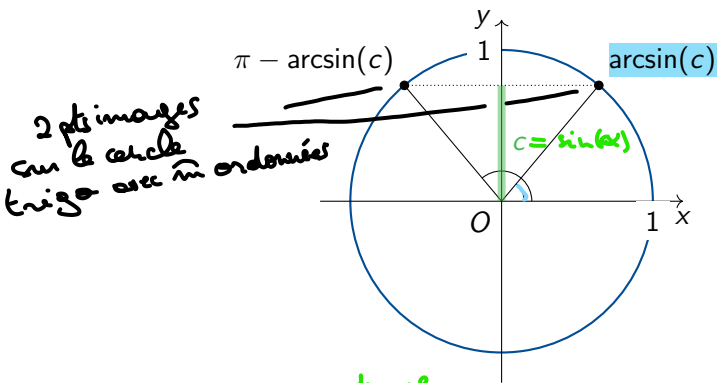
$$\sin^2(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = (\sin(\alpha))^2.$$

Retrouver un angle en partant du sinus

arcsin

Question

Pour quel angle α a-t-on $\sin(\alpha) = c$?



Définition *car c'est une valeur de sinus*

Soit $c \in [-1, 1]$, alors on définit $\arcsin(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(\alpha) = c$.

arcsin

Question

Pour quel angle α a-t-on $\sin(\alpha) = c$?

Réponse

$$\alpha = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

arccos et arctan



Définition

Soit $c \in [-1, 1]$, alors on définit $\arccos(c)$ comme étant l'unique réel α entre 0 et π tel que $\cos(\alpha) = c$.

Si $\cos(\alpha) = c$, alors

$$\alpha = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$$

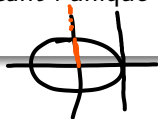
pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

Soit $c \in \mathbb{R}$, alors on définit $\arctan(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\tan(\alpha) = c$.

strictement

Si $\tan(\alpha) = c$, alors



$$\alpha = \arctan(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = \pi + \arctan(c) + k \cdot 2\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

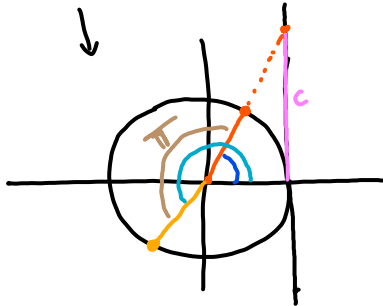
$$\alpha = \arctan(c) + (2k+1)\pi$$

↓
se résume à

$$\alpha = \arctan(c) + \ell\pi$$

avec $\ell \in \mathbb{Z}$.

Angles associés



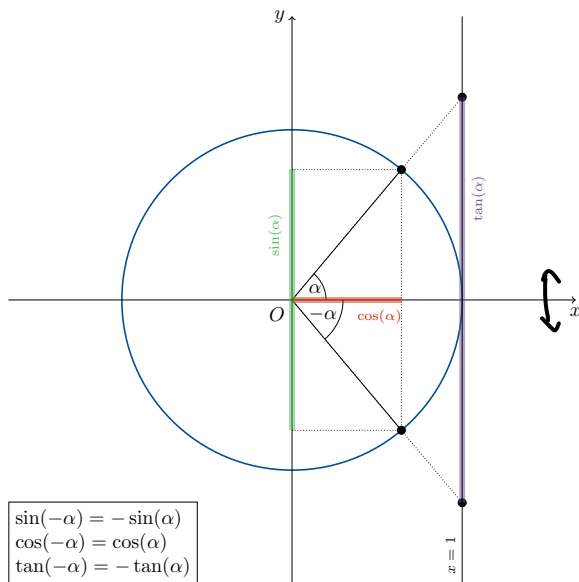
On peut se servir de symétries géométriques pour trouver des relations entre différentes fonctions trigonométriques.

! Attention

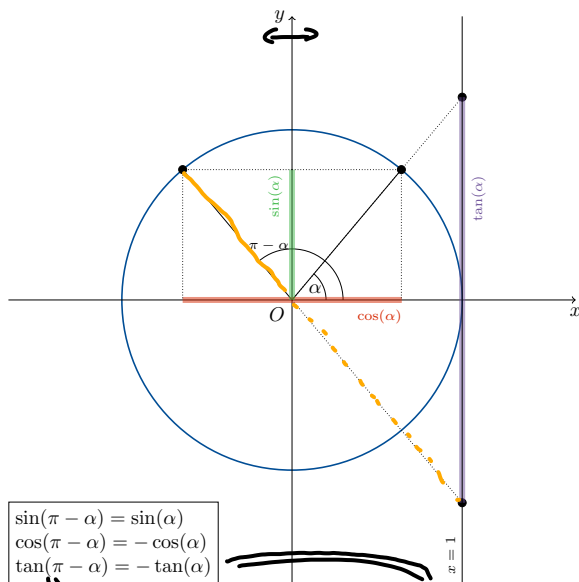
Toutes les relations qu'on va énoncer sont à connaître.

Vous pouvez les apprendre par cœur, mais vous pouvez aussi les déduire des symétries présentées ci-dessous.

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



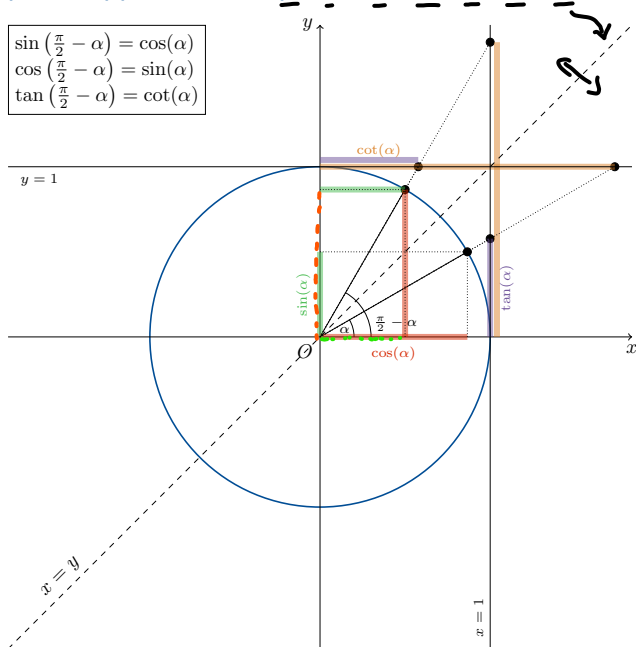
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



$$\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

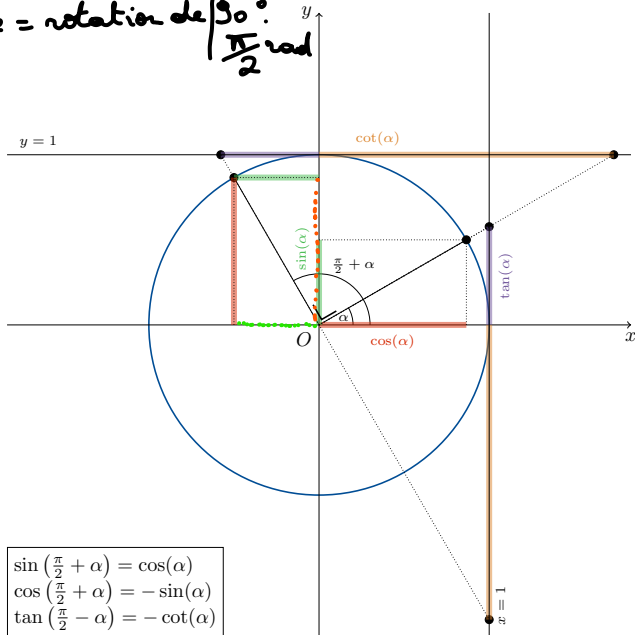
Symétrie par rapport à la première bissectrice

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin(\alpha) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot(\alpha)\end{aligned}$$



Angle décalé de 90°

Symétrie = rotation de 90° :
 $\frac{\pi}{2}$ rad



Réduction aux angles du premier quadrant

On peut utiliser les symétries pour réduire tout angle à un angle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



Exemple

On veut calculer $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)$. On a

$$\frac{35\pi}{6} = \frac{(24 + 11)\pi}{6} = 4\pi + \frac{11\pi}{6}.$$

Donc, $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

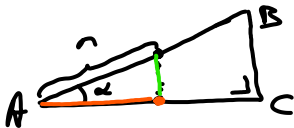
Fonctions trigonométriques dans les triangles

Triangles rectangles

Triangles quelconques

Trigonométrie dans triangles rectangles

Proposition



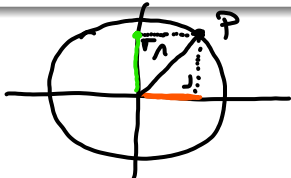
Considérons un triangle ABC , rectangle en C . Dénotons par α l'angle du triangle au sommet A . Alors on a

Thalès fait le lien avec cercle trigo.

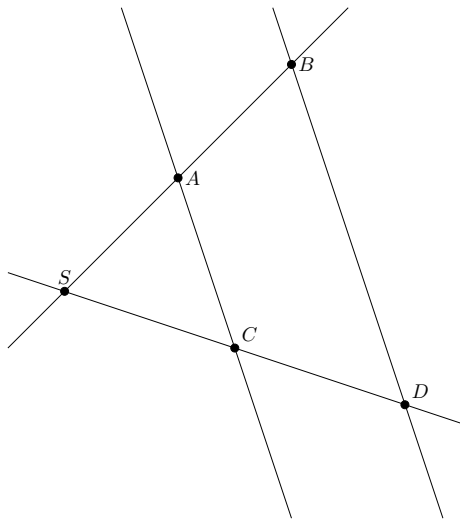
$$\cos(\alpha) = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|BC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\|BC\|}{\|AC\|} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}.$$



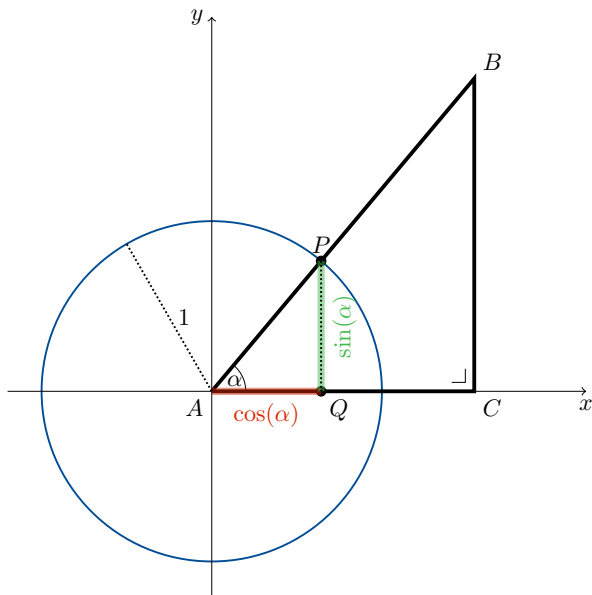
Rappel



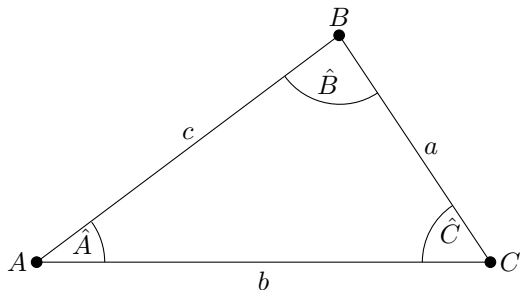
Théorème (de Thalès)

- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|AB\|} = \frac{\|SC\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SB\|}{\|AB\|} = \frac{\|SD\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|SB\|} = \frac{\|SC\|}{\|SD\|} = \frac{\|AC\|}{\|BD\|}.$

Trigonométrie dans triangles rectangles



Triangles quelconques: loi des sinus

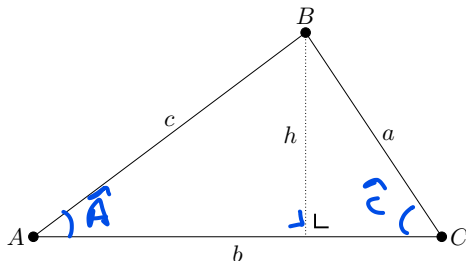


Proposition

Dans un triangle ABC , on a

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}.$$

Preuve de la loi des sinus



Preuve.

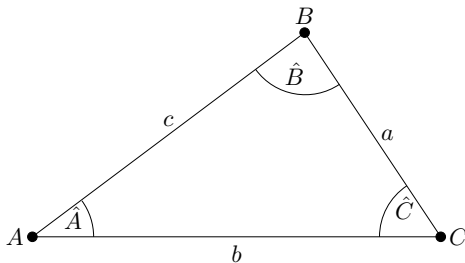
$$\sin(\hat{A}) = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \sin(\hat{A})$$

$$\sin(\hat{C}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin(\hat{C})$$

$$c \sin(\hat{A}) = a \sin(\hat{C}) \Leftrightarrow \frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$



Triangles quelconques: loi des cosinus ou théorème d'Al-Kashi *ou théorème de Pythagore généralisé.*



Théorème

Dans un triangle ABC , on a

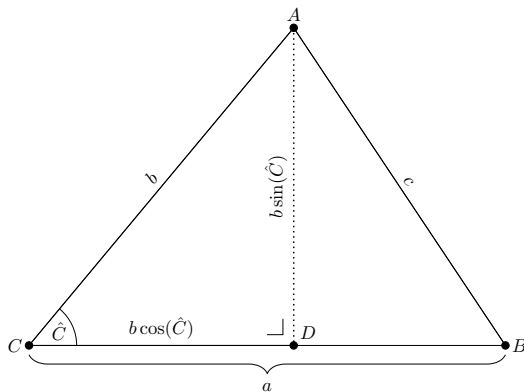
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

Remarque

Le théorème d'Al-Kashi généralise le Théorème de Pythagore.

Preuve de la loi des cosinus

Preuve.



Reportée
à plus tard



Formules de sommes d'angles

Formules de sommes d'angles

Théorème

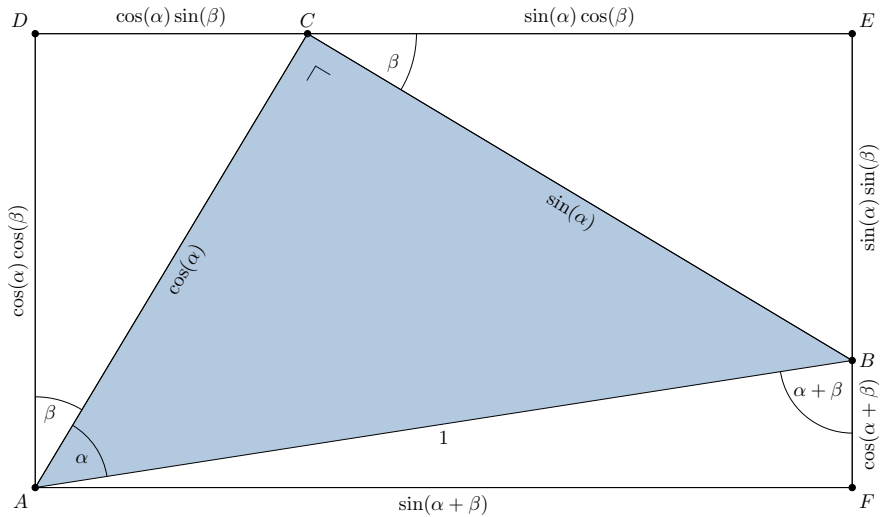
Pour toute paire d'angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

- ▶ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- ▶ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$

! Attention

Il faut connaître ces formules par cœur.

La preuve sur le prochain slide suppose que $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Les autres cas se déduisent en utilisant les angles associés (exercice).



D'autres identités remarquables

D'autres identités remarquables

$\sin(\alpha + (-\beta))$ donc découle de la formule pour la somme.

Différences d'angle

- ▶ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- ▶ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

Multiples d'angles

$\cos(\alpha + \alpha)$

- ▶ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- ▶ $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- ▶ $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- ▶ $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
- ▶ $\cos(3\alpha) = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$

D'autres identités remarquables

Produit sin cos

- ▶ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$
- ▶ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

Somme de cos sin

- ▶ $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

D'autres identités remarquables

Vous ne devez pas connaître par coeur ces identités, mais vous pouvez les déduire des autres résultats dans ce chapitre.

Exemple

Étudions le cosinus *de l'angle double* :

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1} + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \underbrace{\cos^2(\alpha)}_{\text{rel fond}} - 1$$

$$= 2(1 - \sin^2(\alpha)) - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2(\alpha).$$

*relat° fondamentale
= 0*

rel fond