

Chapitre 3: Géométrie analytique

MATHF117

Repères orthonormés et points

Vecteurs

Opérations de base

Autres systèmes de coordonnées

Produit scalaire

Produit vectoriel

Équations

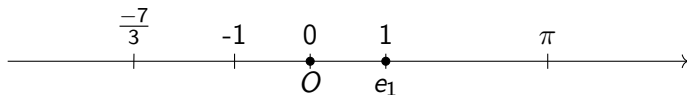
Interprétations géométriques

Repères orthonormés et points

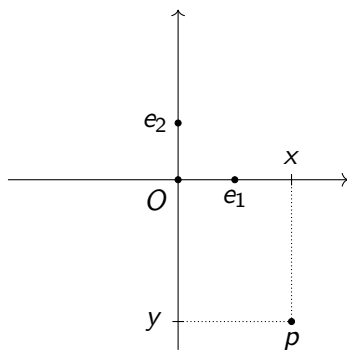
Repère de la droite

Définition

Un **repère de la droite** est un choix de deux points : une origine O , et un point e_1 à distance 1 de O .



Repère orthonormé du plan



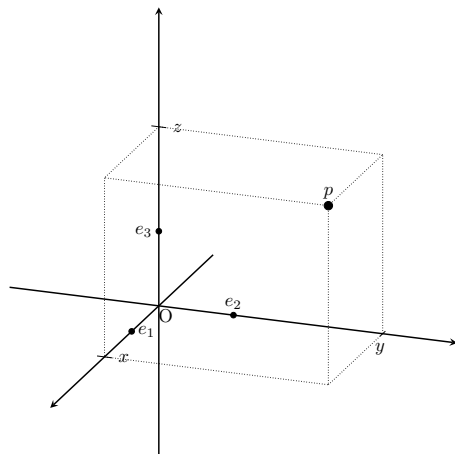
Définition

Un **repère orthonormé** ou **cartésien du plan** est la donnée de trois points : O (l'**origine**), e_1 et e_2 , tels que

- ▶ e_1 et e_2 sont à distance 1 de O
- ▶ les droites Oe_1 (axe des **abscisses**) et Oe_2 (axe des **ordonnées**) forment un angle droit.

Les points p du plan $\longleftrightarrow$ les couples (x, y) où $x, y \in \mathbb{R}$.
Le plan $\longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

Repère orthonormé de l'espace



Définition

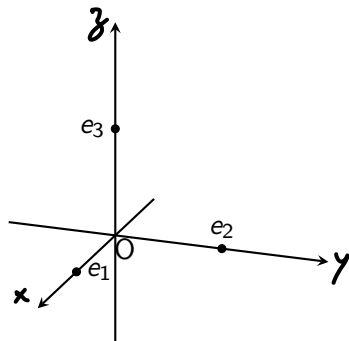
Un **repère orthonormé** ou **cartésien de l'espace** est la donnée de quatre points : une origine O et trois points e_1 , e_2 et e_3 , tels que

- ▶ les e_i sont à distance 1 de O
- ▶ les droites Oe_i sont orthogonales entre elles.

Points p de l'espace $\longleftrightarrow$ les triples (x, y, z) où $x, y, z \in \mathbb{R}$.
L'espace $\longleftrightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 'prod cartésien.

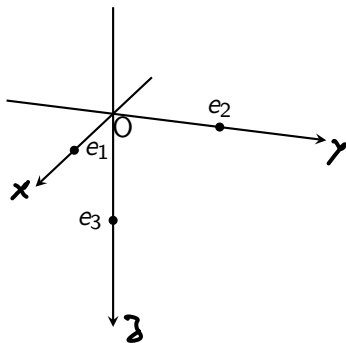
Orientation d'un repère dans l'espace

1 choix d'orientation



Choix standard.

l'autre choix possible



Espace n -dimensionnel

Définition

Soit p un point du plan ou de l'espace. Les entrées du couple (x, y) ou du triple (x, y, z) correspondant à p sont appelés les **coordonnées cartésiennes** de p .

Définition

L'**espace réel n -dimensionnel** est l'ensemble de points de la forme $(p_1, \dots, p_n)$ où $p_i \in \mathbb{R}$. Il est dénoté par $\mathbb{R}^n$.

Vecteurs

Vecteurs libres et liés

Normes et distances

Vecteurs (libres)

Définition

Un **vecteur (libre)** est un élément de $\mathbb{R}^n$.

Remarque (Points = vecteurs ??)

Un élément de $\mathbb{R}^n$ modélise à la fois un point et un vecteur.

Formellement et pratiquement, les points et les vecteurs sont interchangeables

La différence est dans l'**idée** qu'on s'en fait

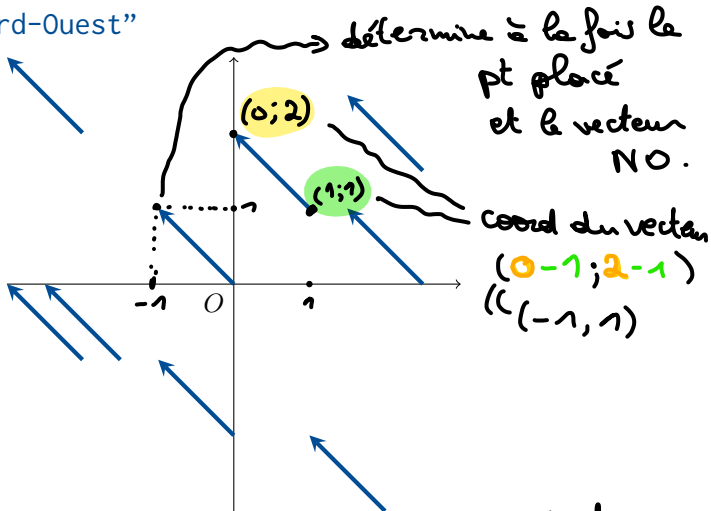
Le point représente un *état*, une *position* tandis que le vecteur représente un *mouvement*, une *évolution*.

Cette différence s'articule dans les contextes d'application et dans le vocabulaire utilisé.

Le vecteur "Nord-Ouest"

libre

on le place
où on veut
dans l'espace.



Exemple

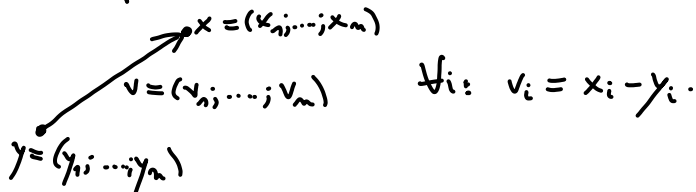
les m coord pour les vect du dessin.

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction "Nord-Ouest" sur le plan.

Définition

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}$ est vu comme un point, les x_i 's sont appelés des coordonnées (cartésiennes) du point. Si $\mathbf{x}$ est vu comme un vecteur les x_i 's les **composantes** du vecteur.

Composante d'un vecteur $\mathbf{v}$:



Vecteur lié

Définition

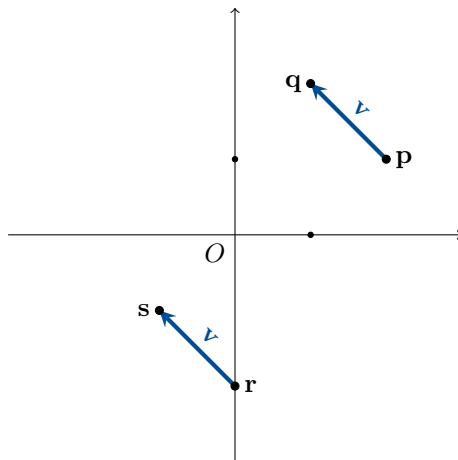
Un **vecteur lié** est donné par

1. un vecteur (libre) $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$
2. un point $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}^n$ appelé le point-base ou l'origine du vecteur lié.

On dessine tel vecteur en plaçant le début de la flèche représentant le vecteur $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{p}$. Si $\mathbf{q}$ est le point qui se trouve sur la fin de la flèche, le vecteur libre est dénoté par $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$.



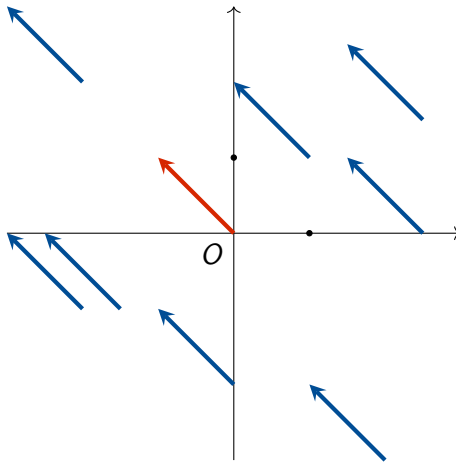
Vecteurs liés équipollents



Définition

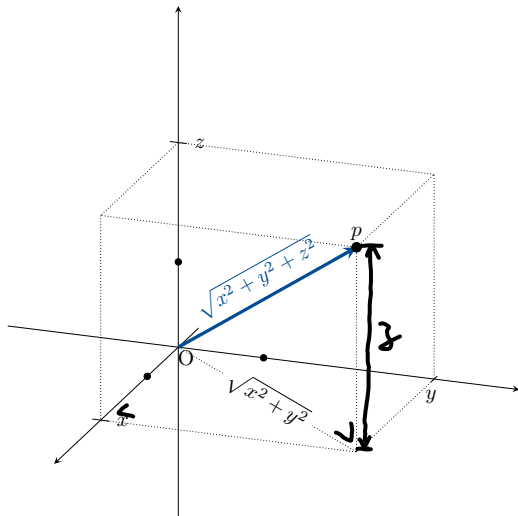
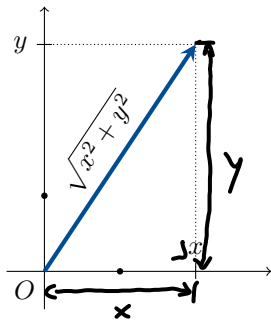
Deux vecteurs liés sont dits **équipollents** s'ils ont le même vecteur sous-jacent.

(libre)



Par défaut, on représentera un vecteur libre comme la flèche liée à l'origine.

Norme } d'un vecteur
longueur



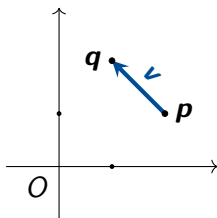
Norme d'un vecteur

Définition

La **longueur** ou **norme** d'un vecteur $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Distance entre deux points



Définition

Soient p, q deux points de $\mathbb{R}^n$. Alors la *distance* entre p et q est alors définie comme étant $\|\vec{pq}\|$: la norme du vecteur liant p à q .

Remarque (Formule pour la distance entre deux points)

Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ alors

$$\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2} \quad \text{car } \vec{pq} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n)$$

Opérations de base

Centre de gravité

Opérations de base

Définition

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) := (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

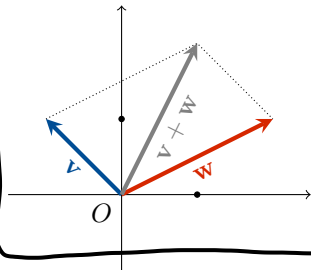
multiplication par un scalaire

un "scalaire".

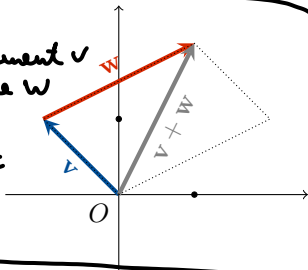
somme
comp par
comp

Interprétation géométrique de la somme

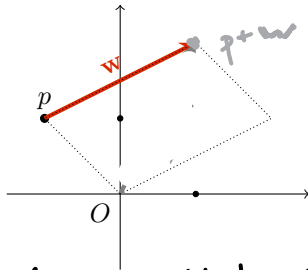
Somme de 2 vecteurs



un déplacement v
puis l'autre w
donne le
déplacement
 $v + w$



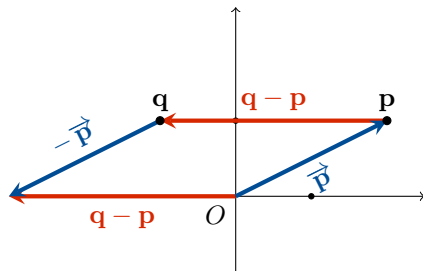
Somme d'un
point et d'un
vecteur.



un point p , on le
déplace par w ,
on obtient un nou-
veau point $p + w$.

Rq Somme de 2 points: pas d'interprétation intuitive.

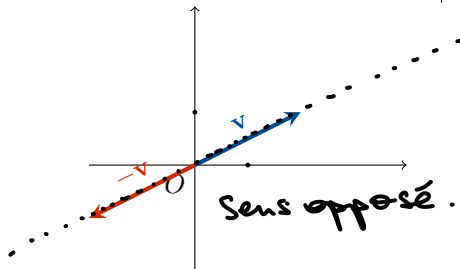
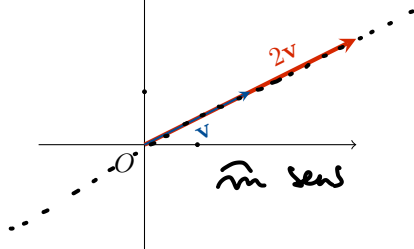
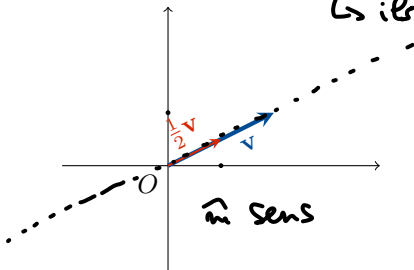
Interprétation géométrique de la différence entre deux points



Interprétation géométrique de la multiplication par un réel

Les vecteurs v et λv sont alignés.

↳ ils ont $\hat{m}$ direction.



Vecteur nul

Définition

L'élément particulier $(0, 0, \dots, 0)$ se note $\vec{0}$ et est appelé **vecteur nul**.

Quel que soit le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$x + \vec{0} = \vec{0} + x = x.$$

Rq: • $0 \in \mathbb{R}$, $\forall$ vecteur $x \in \mathbb{R}^n$: $0 \cdot x = \vec{0}$
pas le vecteur
mais le nombre
scalaire
vecteur
nul.

• Souvent, la flèche est omise sur le vecteur nul.

Vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$

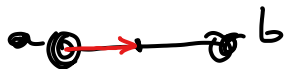
Considérons

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0) \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0) \quad \mathbf{e}_3 := (0, 0, 1).$$

Avec l'origine, ces points forment donc un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$
Alors tout vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \\ &= x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1) \\ &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= (x_1 + 0 + 0, 0 + x_2 + 0, 0 + 0 + x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Centre de gravité



Le milieu d'un segment d'un point a jusqu'à un b est donné par :

$$a + \frac{1}{2}\vec{ab} = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$$

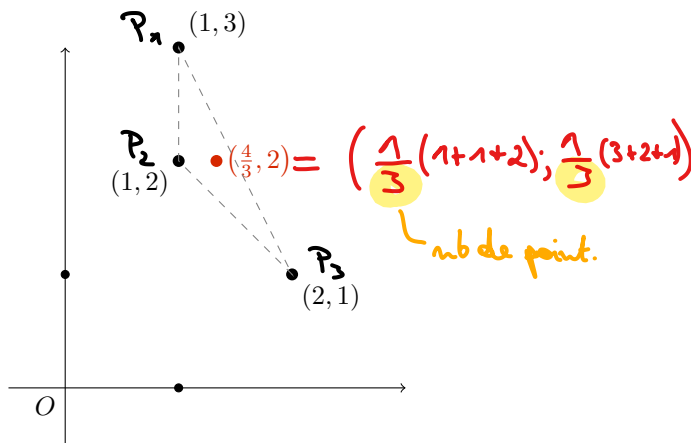
↑
calcul réalisé en composante.

Définition

Si on considère des points $P_1, \dots, P_k$ dans $\mathbb{R}^n$, leur **milieu** ou **centre de gravité** est :

$$\frac{1}{k} \sum_i P_i. \leftarrow \text{C'est la moyenne en composante des points } P_1, \dots, P_k.$$

Centre de gravité

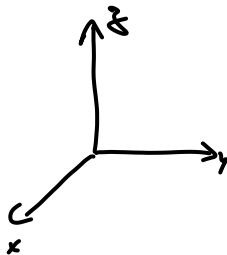
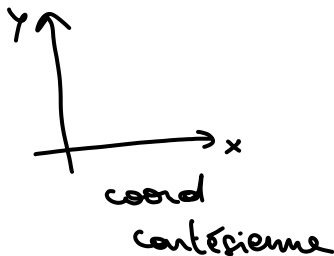


Autres systèmes de coordonnées

Coordonnées polaires

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques



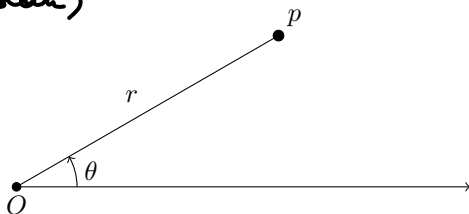
Systèmes de coordonnées

Jusqu'à présent

points de $\mathbb{R}^n$ $\longleftrightarrow$ tuples de nombres réels représentant les projections parallèles dans un repère orthonormé

Ils existent des autres moyens de fixer/décrire des points dans le plan ou l'espace

Coordonnées polaires (dans le plan)

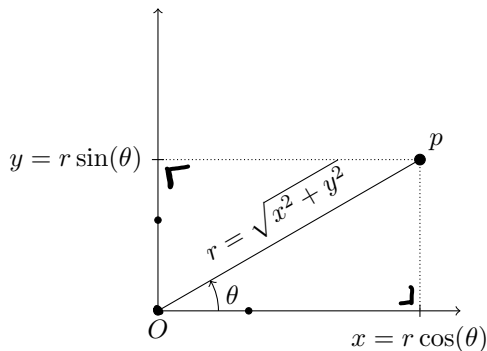


Définition

Soit p un point du plan. Ses **coordonnées polaires** sont donnés par un couple (r, θ) où

- ▶ r est le **rayon** : la distance entre O et P . On a donc que $r \in \mathbb{R}^+$;
- ▶ θ est **angle polaire** : l'angle orienté entre la demi-droite fixée et la demi-droite issue de O et passant par p . On peut donc prendre $\theta \in [0, 2\pi[$

Coordonnées polaires et cartésiennes



On a que

$$x = r \cos(\theta)$$

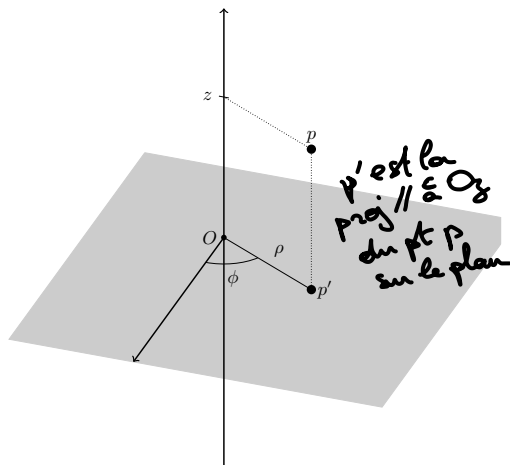
$$y = r \sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{distance à } O.$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$ correspondance biunivoque $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Coordonnées cylindriques



Définition

Soit p un point de l'espace. Ses **coordonnées cylindriques** sont données par un triple (ρ, ϕ, z) où

1. ρ est la distance entre p' et O .
2. z est la **hauteur**
3. ϕ est l'**azimut**

Coordonnées cylindriques et cartésiennes

$(x, y, z) \longleftrightarrow (\rho, \phi, z)$ correspondance bi-univoque pour tout $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{axe } O_z\}$.

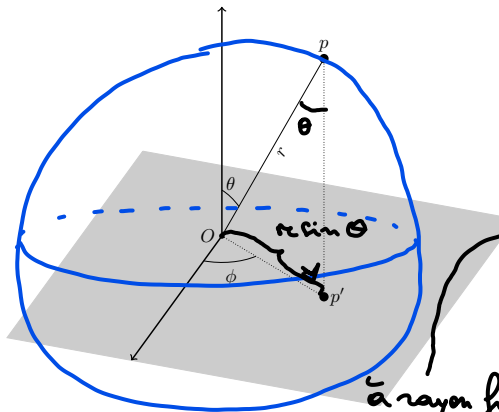
Si p est un point de coordonnées cylindriques $(\rho, \phi, z_{\text{cyl}})$ et de coordonnées cartésiennes (x, y, z_{cart}) alors on a

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z_{\text{cart}} = z_{\text{cyl}}$$

coord polaire dans le plan $z=0$.

Coordonnées sphériques



Définition

Soit p un point de l'espace. Ses **coordonnées sphériques** sont données par un triple (r, ϕ, θ) où

1. r est le **rayon** : la distance entre p et O .
2. θ est **l'angle polaire** *colatitude.*
3. ϕ est **l'azimut** *longitude.*

à rayon fixé on est sur une sphère
→ besoin de 2 φ pour se repérer sur la sphère.

Remarque

On prend $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes

$(x, y, z) \longleftrightarrow (r, \phi, \theta)$ correspondance biunivoque
pour tout $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Si p est un point de coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) et de coordonnées cartésiennes (x, y, z) alors on a

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Produit scalaire  $\neq$ multiplication par un scalaire.

Définition du produit scalaire

Définition

Le **produit scalaire** entre deux vecteurs v et w de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

produit de 2 vect donnant un nb.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire entre les vecteurs $(1, -2, 3)$ et $(2, -2, 0)$ est donné par :

$$(1, -2, 3) \cdot (2, -2, 0) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 6.$$

autre notat°: $\langle v, w \rangle$

Propriétés de base du produit scalaire

Proposition

Pour tous vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mu \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ (linéaire à gauche)
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (symétrique)
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ et de plus, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \vec{0}$ (défini positif).
égalité de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ *égalité de vecteurs*

Remarque

Linéaire à gauche + symétrique $\Rightarrow$ linéaire à droite.

Le produit scalaire est **bilinéaire**

Proposition

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Preuve.

Considérons la quantité $(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + t\mathbf{b})$



Reportée à plus tard.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- ▶ $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\|$;
- ▶ $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ (inégalité triangulaire).



Preuve.

Reportée à plus tard

Rappel: $v, w \in \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$

Prod. scalaire $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

Lien avec la norme $\|v\|^2 = v \cdot v$



Produit scalaire et angles entre vecteurs

Proposition

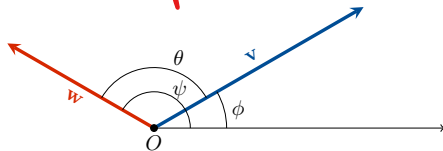
sur $\mathbb{R}^3$

Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

Preuve. *Reportée.*



Angle entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$



Définition

Soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'**angle** entre ces deux vecteurs est défini comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$$

Remarque

Le produit scalaire entre deux vecteurs non-nuls s'annule si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 &\rightarrow \cos(\theta) = 0 \\ &\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ &\text{et } \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Produit scalaire et projection orthogonales

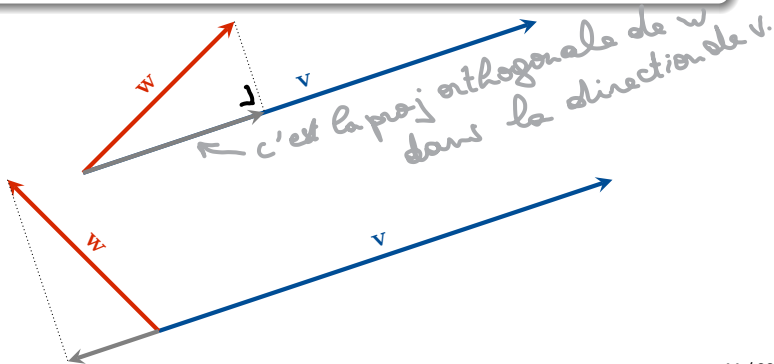
Proposition

Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

c'est bien un multiple du vecteur $\mathbf{v}$

est le **projeté** ou **projection orthogonale** de $\mathbf{w}$ sur la droite engendrée par $\mathbf{v}$.



Preuve.

Reportée

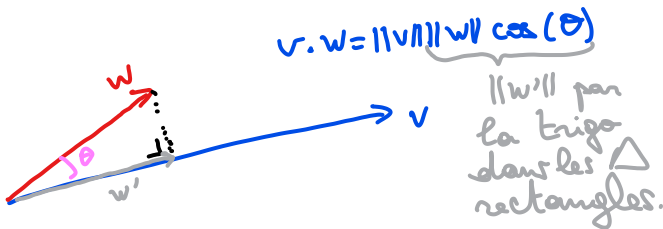


Corollaire

Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs, leur produit scalaire est donné par :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}'\|$$

où $\mathbf{w}'$ est le projeté de $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{v}$.



Produit vectoriel

Définition du produit vectoriel

Produit de vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ dont le résultat est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Définition

Si $a, b \in \mathbb{R}^3$, on définit leur produit vectoriel

$$\begin{matrix} \text{Si } a, b \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Si } a = (a_1, a_2, a_3) \text{ et } b = (b_1, b_2, b_3) \end{matrix} \quad a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Exemple

On a

$$\begin{aligned} (1, 0, 1) \times (0, -2, 1) &= (0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2), 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 0) \\ &= (2, -1, -2). \end{aligned}$$

Propriétés du produit vectoriel

Proposition

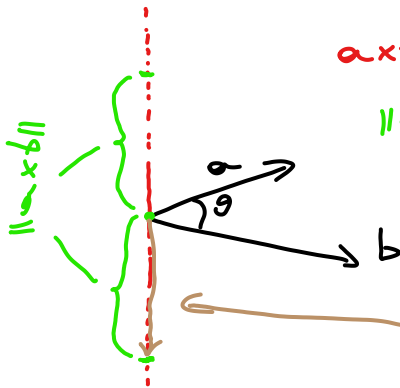
Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

- ▶ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ et $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$;
- ▶ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$;
- ▶ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ où θ est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$;
- ▶ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (anti-symétrique) ;
- ▶ $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \beta \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$

$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{aire du parallélogramme construit sur } \mathbf{a}, \mathbf{b}$.



▶ $\mathbf{a} \times (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$



$a \times b \perp a$ et b (donne la direction de $a \times b$)
 $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$
 (donne la longueur de $a \times b$.)

Reste à déterminer le sens.
 (Règle de la main droite plus bs)

Particularité du produit vectoriel

Admettant un prod vect
 Structure de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

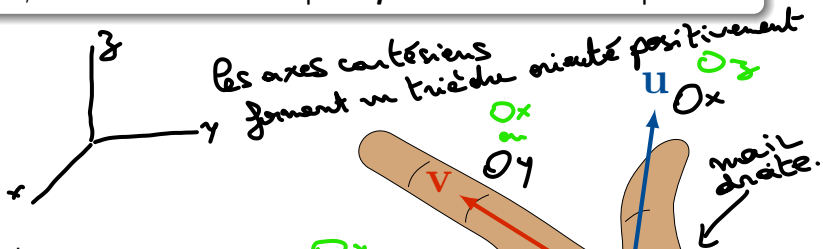
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^5$	$\mathbb{R}^6$	$\mathbb{R}^7$	$\mathbb{R}^8$	...
$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$					$\mathbb{O}$	

Trièdres orientés

Détermination du sens de $a \times b$.

Définition

Un **trièdre orienté** est la donnée d'une séquence de trois vecteurs u, v, w , tous issus d'un même point p . L'ordre a ici son importance.



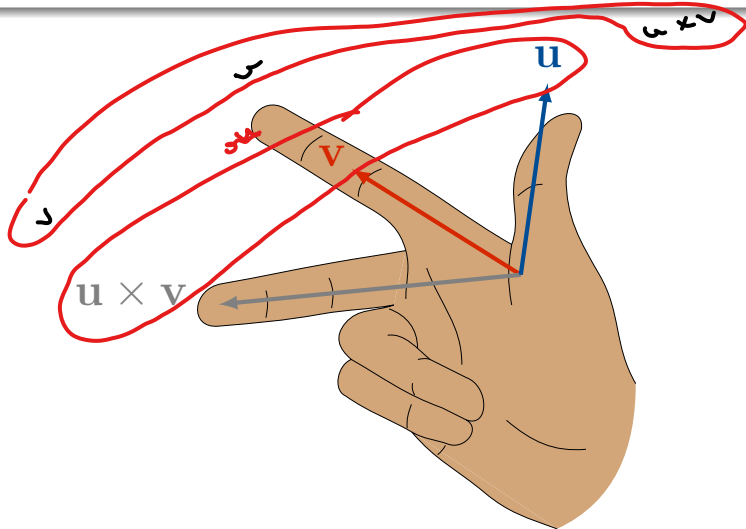
Un trièdre orienté
 u, v, w
d'orientation **positif**
trièdre droit

Le schéma similaire avec la main gauche donne l'orientation négative.

Trièdres orientés et produit vectoriel

Proposition

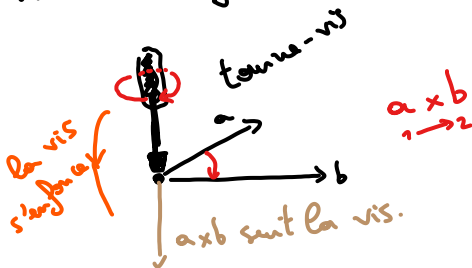
Le trièdre formé de vecteurs $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ est un trièdre droit.



Équations

Droites dans le plan
Plans dans l'espace
Droites dans l'espace
Cercles
Cylindres
Sphères

Autre image :



Équations cartésiennes

Définition

Équations cartésiennes : conditions sur les coordonnées cartésiennes d'un point : (x, y) du plan ou (x, y, z) de l'espace. Lorsque le point vérifie les équations, il est dans l'ensemble ; sinon il n'y est pas.

Exemples

- ▶ $x = 1$ est l'équation d'une droite dans le plan $\rightarrow S = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $x = 1$ est l'équation d'un plan dans l'espace $\rightarrow S = \{(1, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $\begin{cases} x = 1 \leftrightarrow \text{plan} \\ y = 2 \leftrightarrow \text{plan} \end{cases}$ sont les équations d'une droite dans l'espace
- $\rightarrow$ Solutions sont dans les 2 plans dans l'intersection des 2 plans.

Équations paramétriques

Définition

Les **équations paramétriques** décrivent explicitement chacun des points de l'ensemble en fonction de certains paramètres (qui peuvent varier).

Exemple

Les équations

éq cart $\leftrightarrow$ *éq param* $x^2 + y^2 = 1$

$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$

pour $t \in [0, 2\pi]$ décrit un cercle de rayon 1 dans le plan.

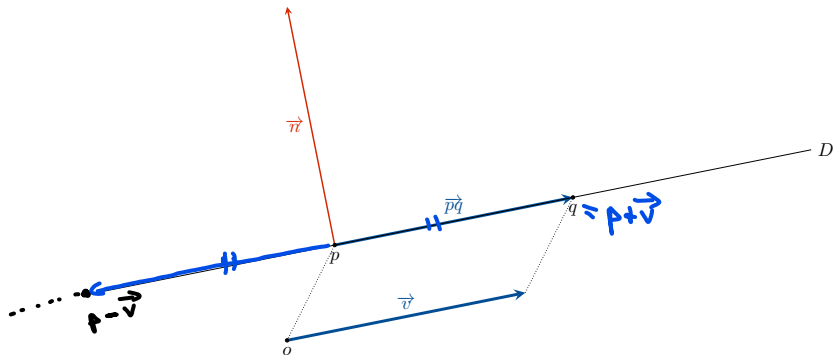
*chq t ici - dedans
donne un point (x,y) dans le pB*

Droites

Une droite est fixée par deux points.

Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite (ou un plan) est tout vecteur qui est la différence entre deux points (différents) de la droite (ou du plan). Un **vecteur normal** est un vecteur perpendiculaire à tout vecteur directeur.



Droites

Une droite contenant p et de vecteur directeur $\vec{v}$:

$$\{ \underbrace{p + t\vec{v}}_{q \in D} \text{ tel que } t \in \mathbb{R} \}$$

Dans le plan :

Proposition

Une droite passant par $\underbrace{(p_1, p_2)}_P$ et de vecteur directeur $\underbrace{(u, v)}_{\vec{v}}$ est l'ensemble de $\underbrace{(x, y)}_q \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = p_1 + tu \\ y = p_2 + tv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (p_1, p_2) + t(u, v) \\ \text{ou} \\ q = p + t\vec{v}$$

pour une certaine valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Droites dans le plan: paramétriques $\rightarrow$ cartésienne

$$q = p + t\vec{v}$$

avec $q = (x, y)$

Exemple

Si on considère la droite de vecteur directeur $(1, -1)$ passant par $(0, 2)$, ses équations paramétriques sont données par

$$\begin{cases} x = 0 + t \cdot 1 \\ y = 2 + t \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t. \end{cases}$$

Alors on a que $t = x$ et $t = 2 - y$. L'équation cartésienne de la droite est donné par $x = 2 - y$, ou encore $x + y = 2$.

Pour trouver les $\vec{eq}$ cartésiennes, on isole t dans les $\vec{eq}$ param.

Droites dans le plan: équation cartésienne

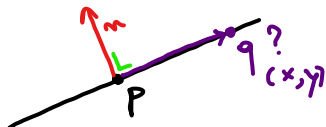
Considérons une droite D

- ▶ passant par $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$
- ▶ de vecteur normal $\mathbf{n} = (\alpha, \beta)$

$\mathbf{q} = (x, y) \in D$ si et seulement si

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) = 0$$



$$\begin{aligned} \vec{PQ} &\perp \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PQ} &= 0 \\ \vec{PQ} &= (x - p_1, y - p_2) \end{aligned}$$

Proposition

La droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur normal (α, β) , passant par (p_1, p_2) a comme équation cartésienne

$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) = 0$$

Droites dans le plan: équation cartésienne

Corollaire

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble des points (x, y) satisfaisant l'équation

$$\alpha x + \beta y = \delta$$

est une droite de vecteur normal (α, β) .

Preuve.



Droites dans le plan: équation cartésienne et paramétrique

$$(u, v) \perp (v, -u) \text{ car} \\ (u, v) \cdot (v, -u) = u \cdot v + v \cdot (-u) = 0$$

(u, v) vecteur directeur $\Leftrightarrow (v, -u)$ vecteur normal

Proposition

Soit D la droite de vecteur directeur (u, v) , passant par le point (p_1, p_2) . Alors D a comme équation cartésienne

$$v(x - p_1) - u(y - p_2) = 0.$$

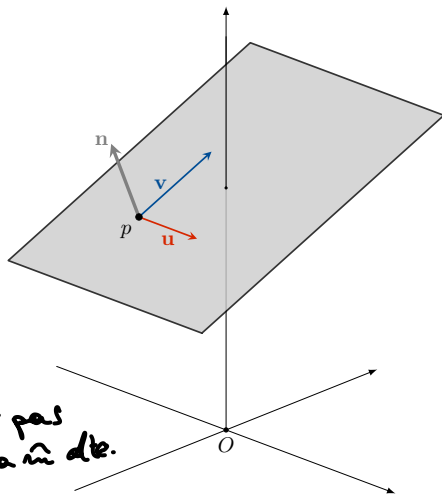
Plans dans l'espace: équations paramétriques

Un plan dans l'espace a *deux directions*. Un plan passant par $\mathbf{p}$ et de vecteurs directeurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$

$$\{ \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

avec la condition que $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ ne soient pas multiples l'un de l'autre.

ils ne peuvent pas être sur la même dr.



Plans dans l'espace: équations paramétriques

$q = (x, y, z)$ — $\{p + tu + sv \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ plan.

(p_1, p_2, p_3) (u_1, u_2, u_3) (v_1, v_2, v_3)

Les équations paramétriques sont explicitement données par

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

où $t, s \in \mathbb{R}$ sont les deux paramètres de ces équations paramétriques (en d'autres termes : lorsqu'ils varient dans $\mathbb{R}$, ils permettent de décrire tous les points du plan considéré).

Plans dans l'espace: paramétriques $\rightarrow$ cartésienne

Exemple

$$\begin{cases} x = 0 + t \cdot 1 + s \cdot 0 \\ y = 0 + t \cdot 0 + s \cdot 1 \\ z = -2 + t \cdot 1 + s \cdot 1 \end{cases}$$

Handwritten notes: $t=x$, $s=y$, $z = -2 + x + y$. The parameters t and s in the parametric equations are circled in orange and labeled with u and v respectively.

Le plan d'équations $(x, y, z) = (t, s, s + t - 2)$ se réécrit sous forme cartésienne : $x + y - z = 2$. isoler s et t

$$z = y + x - 2$$

Rq: pour un plan : 1 éq cartésienne.
pour 1 dte : système de 2 éq cartésiennes
de car intersection de 2 plans.

Plans dans l'espace: équation cartésienne

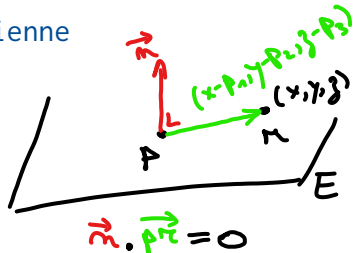
E un plan

- ▶ passant par $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$
- ▶ de vecteur normal $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\mathbf{r} = (x, y, z) \in E$ si et seulement si

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} \perp \mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3.$$



$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) + \gamma(z - p_3) = 0$$

Proposition

Le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal (α, β, γ) , passant par (p_1, p_2, p_3) a comme équation cartésienne

$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) + \gamma(z - p_3) = 0$$

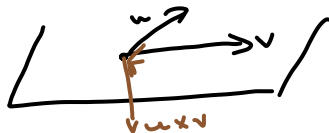
Corollaire

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble des points (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

est un plan de vecteur normal (α, β, γ) .

Plans dans l'espace: équation cartésienne et paramétriques



Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs directeurs d'un plan, alors, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est un vecteur normal à au plan.

Proposition

Soit P le plan de vecteurs directeurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ passant par $\mathbf{p}$. Alors D a comme équation cartésienne

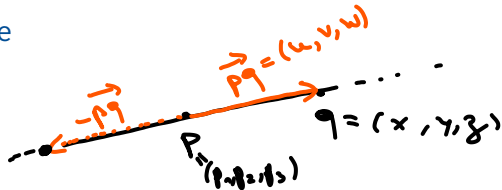
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot ((x, y, z) - \mathbf{p}) = 0$$

(α, β, γ)

$\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ du plan

— sur le slide correspondant.

Droites dans l'espace



Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les équations paramétriques (de paramètre t) sont données par

$$Q = P + t \vec{PQ} \iff \begin{cases} x = p_1 + tu \\ y = p_2 + tv \\ z = p_3 + tw. \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Droites dans l'espace: paramétriques $\rightarrow$ cartésiennes

Exemple

Considérons la droite de vecteur directeur $(1, -1, -1)$ et passant par $(1, 0, -2)$:

$$\begin{cases} x = \underline{1} + \underline{1}t \\ y = \underline{0} - \underline{1}t + \underline{0} \\ z = \underline{-2} - \underline{1}t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xleftarrow{\substack{\text{éq.} \\ \text{cart.}}} \text{on isole} \\ \text{le paramètre} \end{array}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Alors on a $t = x - 1$, $t = -y$ et $t = -z - 2$. Ceci est équivalent au système

$$\begin{cases} x - 1 = -y \\ -y = z + 2 \end{cases}.$$

Ce sont des équations cartésiennes de la droite.

Une droite dans l'espace est l'intersection de deux plans.

Droites dans l'espace: paramétriques $\rightarrow$ cartésiennes

Si (u, v, w) est vecteur directeur d'une droite, alors $(v, -u, 0)$ et $(0, w, -v)$ sont deux vecteurs perpendiculaires. (infinité de choix possibles)

$\rightarrow$ équations cartésiennes de la droite de vecteur directeur (u, v, w) passant par (p_1, p_2, p_3) :

$$\begin{cases} v(x - p_1) - u(y - p_2) = 0 \\ w(y - p_2) - v(z - p_3) = 0. \end{cases}$$

eq cart d'un plan $\perp$ à $(v, -u, 0)$
et passant par P.

$\uparrow$
Ce plan contient
la dte de vecteur
directeur (u, v, w) .

Parallélisme

Dans $\mathbb{R}^3$: éq cont plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$
(α, β, γ) vecteur normal.

éq cont dte $\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow$ syst décrivant l'intersection de 2 plans.

Définition

Deux droites de $\mathbb{R}^n$, de vecteurs directeurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ respectivement, sont dites **parallèles** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$.



Définition

Deux plans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

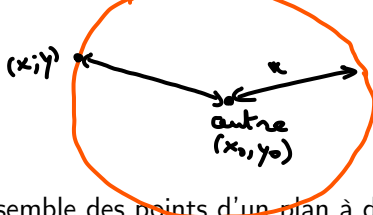
et

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$$

sont dites **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont multiples l'un de l'autre. C'est-à-dire, il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha, \beta, \gamma) = t(\alpha', \beta', \gamma')$.

Cercles

Dans $\mathbb{R}^2$:



Définition

Un **cercle** est l'ensemble des points d'un plan à distance (**rayon**) donnée d'un centre.

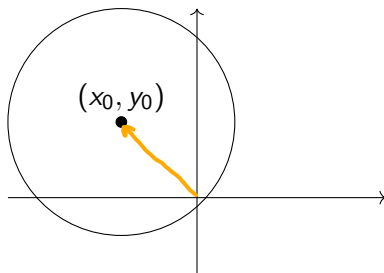
La distance entre deux points $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ est donnée par

$$\|\vec{pq}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2};$$

Le cercle centré en (x_0, y_0) de rayon r du plan est défini par l'équation

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Cercles



Les équations paramétriques :

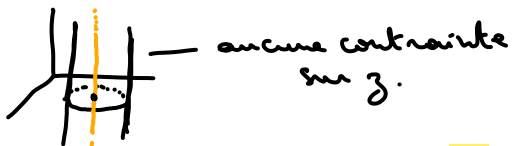
$$x = x_0 + r \cos(t)$$

$$y = y_0 + r \sin(t)$$

où t est le paramètre. Ici $t \in \mathbb{R}$ ou, plus simplement, $t \in [0, 2\pi[$

Cylindres

Dans $\mathbb{R}^3$



L'équation cartésienne d'un cylindre dans l'espace ayant comme **axe** un parallèle à l'axe z et passant par $(x_0, y_0, 0)$, de rayon R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Sphères

L'équation cartésienne d'une sphère centrée en (x_0, y_0, z_0) de rayon R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

→ T: $\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \text{à distance } R \text{ de } (x_0, y_0, z_0) \}$.

Interprétations géométriques

Angles

Distances

Angles

Définition

L'angle entre deux droites est donné par l'angle entre leurs vecteurs directeurs.

$$\hookrightarrow \cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}$$

Remarque

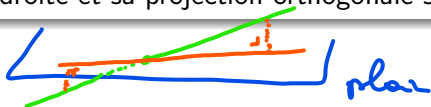
Dans le plan, on peut également utiliser les vecteurs normaux.

Définition

L'angle entre deux plans de l'espace est donné par l'angle entre leurs vecteurs normaux.

Définition

L'angle entre une droite et un plan de l'espace est donné par l'angle entre cette droite et sa projection orthogonale sur le plan.

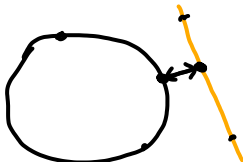


Angles, parallélisme et orthogonalité

Remarque

Deux droites/plans sont alors parallèles, si l'angle entre eux vaut 0 et **perpendiculaires** si l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$.

Distances



Nous savons que la distance entre deux points p et q est la norme $\|q - p\|$. Notons $d(p, q)$ cette quantité.

Définition

La **distance** entre deux sous ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\min\{d(p, q) \text{ tel que } p \in E, q \in F\}.$$

C'est donc la plus petite distance possible entre deux points quelconques de ces ensembles. Elle peut être nulle, par exemple si $E \cap F$ n'est pas vide.



Distance entre point et droite

Proposition

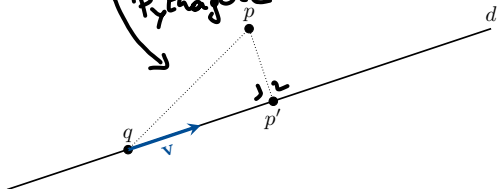
Considérons un point $\mathbf{p}$ et une droite d , passant par $\mathbf{q}$ et de vecteur directeur $\mathbf{v}$. Alors le point sur d de distance minimale à $\mathbf{p}$ est donné par la **projection parallèle de $\mathbf{p}$ sur d** ,

$$\mathbf{p}' := \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$

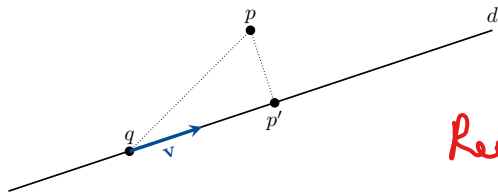
Donc la distance entre $\mathbf{p}$ et d est

$$\|\mathbf{pp}'\| = \sqrt{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 - \frac{((\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}}.$$

Pythagore.



Preuve.



Reportée



Distance entre point et plan

Proposition

La distance entre le point p et le plan de vecteur normal w passant par q est donnée par

$$\frac{|w \cdot (p - q)|}{\|w\|}.$$

Preuve.

Rapportée

