

Àpd mnt: Les TP ex cath sont donné par
Nascimo Fournier

Chapitre 4: Fonctions

MATHF117

Graphes de fonctions

Opérations sur les fonctions

Quelques classes de fonctions

- Fonctions polynomiales

- Fonctions rationnelles

- Fonctions exponentielles

- Fonctions trigonométriques

Propriétés de fonctions

- Croissance et décroissance

- Parité

- Périodicité

- Injectivité, surjectivité et bijectivité

Fonctions réciproques

- Fonctions racines

- Fonctions logarithmiques

- Fonctions trigonométriques réciproques

La notion de “fonction” est un concept très général pour représenter toute forme d’association ou transformation.

Définition d'une fonction

Définition

Pour définir une **fonction** f nous avons besoin de :

1. un ensemble de départ A , appelé le **domaine** de f ;
2. un ensemble d'arrivé B ;
3. une règle qui associe à chaque élément x de A ^{un} unique élément de B , noté $f(x)$.

On écrira alors :

$$f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$$

On dira alors que

- ▶ $f(x)$ est l'**image** de x par f ,
- ▶ x est un **antécédent** de $f(x)$.

L'**ensemble image** de f est

$$\text{Im}(f) := \{f(x) \in B \mid x \in A\}.$$

Exemples de fonctions

Exemple

Si A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'ULB et B l'ensemble de filières proposées par notre université, on peut définir une fonction f

$$f : \text{Étudiant.es} \rightarrow \text{Filières}$$

qui associe à chaque étudiant(e) sa section.

C'est 1 fct si on suppose qu'on ne peut pas s'inscrire dans plus qu'une filière.

Exemples de fonctions

Exemple

Si A est l'ensemble des lettres de l'alphabet et B l'ensemble des nombres naturels, on peut définir une fonction f qui associe à chaque lettre son code ASCII.

$f : \text{Lettres de l'alphabet} \rightarrow \text{Nombres naturels entre 0 et 127}$

$A \mapsto 65$

$B \mapsto 66$

$\vdots$

Exemples de fonctions: complexité algorithmique

Exemple

On définit $\mathcal{C} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}(n)$ est la quantité de ressources utilisées par un algorithme donné quand il traite une entrée de taille n .

```
1 def recherche_lineaire(liste, cible):  
2     for element in liste: # Parcourt chaque é  
        lément une fois  
3         if element == cible:  
4             return True  
5     return False
```

si on donne à cet algorithme une liste de taille n , au pire, l'algorithme devrait vérifier les n entrées de la liste. On écrira donc que $\mathcal{C}(n) = n$.

Exemples de fonctions: fonction identité

Définition

Soit A un ensemble, la **fonction identité** sur A est la fonction

$$f : A \rightarrow A : x \mapsto x.$$

Elle est souvent notée Id_A .

C'est la fonction "qui ne fait rien".

Exemples de fonctions: fonctions plancher et plafond

Exemple

On définit deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- ▶ La fonction **plancher** associe à x le plus grand entier plus petit ou égal à x , dénoté $\lfloor x \rfloor$. Par exemple $\lfloor \pi \rfloor = 3$
- ▶ la fonction **plafond** associe à x le plus petit entier plus grand ou égal à x , dénoté $\lceil x \rceil$. Par exemple $\lceil -6,002 \rceil = -6$.

Ce sont aussi des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Rq: $n \in \mathbb{N}$: $n = \underbrace{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \underbrace{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

les 2 termes sont naturels.

Exemples de fonctions à valeurs réelles

Exemple

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -x + 1$. Alors on a par exemple $f(2) = -1$.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ associe à un réel sa valeur absolue.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. L'ensemble image de cette fonction est $\mathbb{R}^+$.
- ▶ Les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ou $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ ne sont pas les mêmes fonctions que la fonction du point précédent. En effet, elles n'ont pas le même ensemble de départ ou d'arrivée.

! Attention

Écrire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^- : x \mapsto x^2$ n'a pas de sens !

En effet, $f(1) = 1 \notin \mathbb{R}^-$.

Il faut que l'ensemble d'arrivée contienne l'ensemble image.

Remarque

Bien que pour définir *proprement* une fonction, il faut préciser ensemble de départ et d'arrivé, il est commun que ces informations sont omises et qu'on écrive simplement par exemple

Considérons la fonction $f(x) = x + 3$.

Ceci arrive souvent dans des situations où les ensembles de définition sont *sous-entendus* ou *pas importants* dans le contexte.

Les noms des variables sont arbitraires

Remarque

Le fait que nous utilisons la lettre x pour indiquer $x \mapsto f(x)$ est une pure convention. On pourrait très bien écrire

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto -t + 1.$$

Ou encore

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \heartsuit \mapsto -\heartsuit + 1.$$

Graphes de fonctions

Graphes de fonctions

Définition

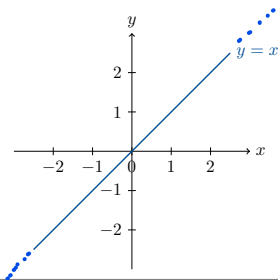
Soit $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ une fonction où on suppose que $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Le **graphe** de f est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = y$. Autrement dit

$$\text{Graphe}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}.$$

l'ensemble des sol de l'éq $y = f(x)$.

Exemple

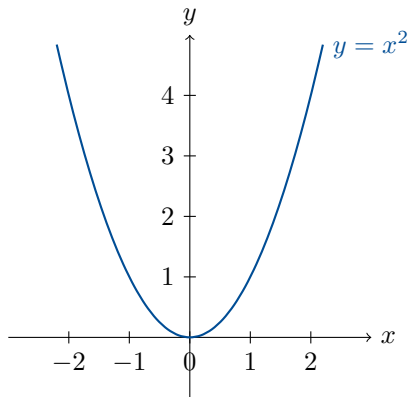
Le graphe de la fonction identité $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Exemples de graphes de fonctions

Exemple

Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

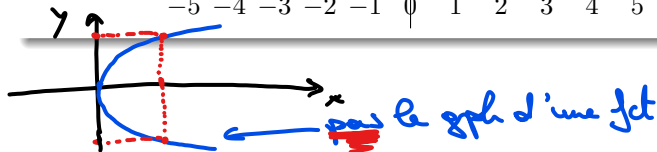
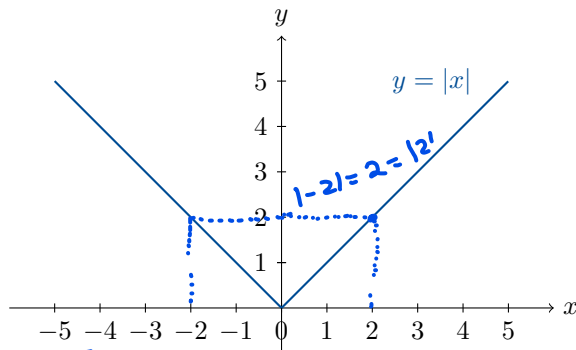


La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto x^2$ a le même graphe !

Exemples de graphes de fonctions

Exemple

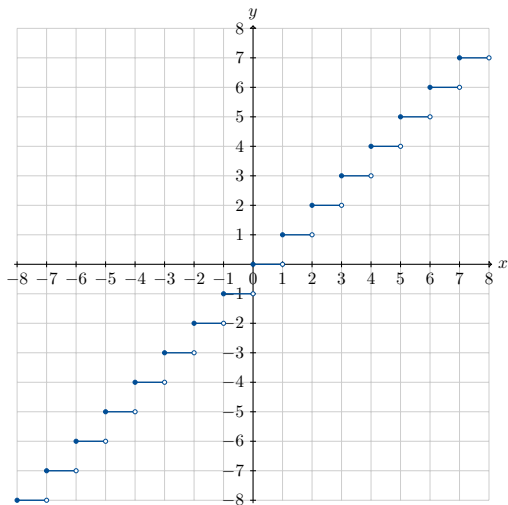
Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$



Exemples de graphes de fonctions

Exemple

Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$



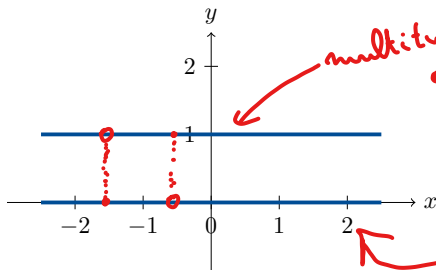
Graphes impossibles: fonction de Dirichlet

Exemple

Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$



?????
C'est bien le gph d'une fct.

Opérations sur les fonctions

Restriction d'une fonction

Définition

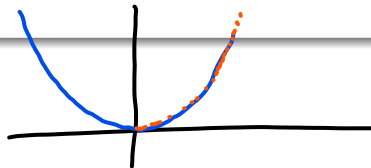
Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction et $A' \subseteq A$, alors f définit une fonction sur A' appelée **restriction** de f à A' et notée $f|_{A'}$. On a donc

$$f|_{A'} : A' \rightarrow B : x \mapsto f(x)$$

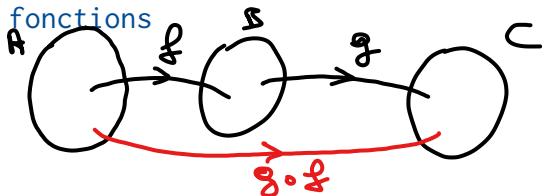
La seule différence avec f est donc l'ensemble de départ.

Exemple

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, alors on a $g = f|_{\mathbb{R}^+}$.



Composition de fonctions



Définition

Étant donné des fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, on peut définir la **composée** $g \circ f$ (lire "g rond f") de ces fonctions par

$$g \circ f : A \rightarrow C : x \mapsto g(f(x))$$

Rq: Ici il suffit $\text{Im } A \subseteq B$

On écrira $f^2 := f \circ f$, $f^3 := f \circ f \circ f$, etc.

! Attention

L'ordre de composition est important. En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Pire: il se peut que $g \circ f$ ait un sens mais pas $f \circ g$

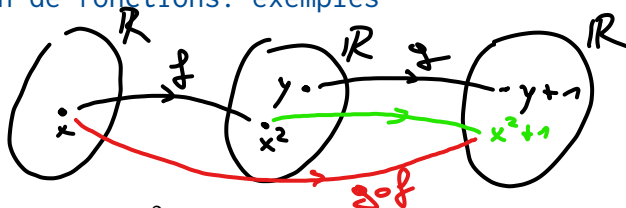


fonction sinus:

$$\sin^2(\theta) = \sin(\theta) \cdot \sin(\theta)$$

$$\neq \sin(\sin(\theta))$$

Composition de fonctions: exemples



Exemple

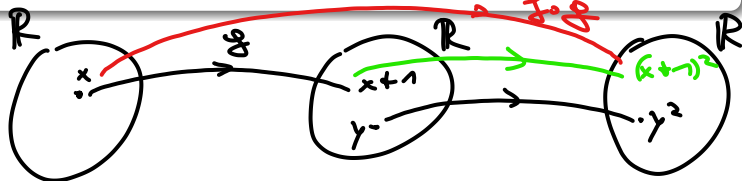
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$, alors on a

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(f(x)) = x^2 + 1$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(g(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$



Sommes et produits de fonctions

Définition

Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ La **somme** $f + g$ est définie par $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, pour $x \in A$.
image par une somme de fct
fonction.
- ▶ Le **produit par un scalaire** cf est défini par $(cf)(x) := c.f(x)$, pour $x \in A$.
nombre
- ▶ Le **produit** fg est défini par $(fg)(x) := f(x)g(x)$, pour $x \in A$.
- ▶ Le **quotient** $\frac{f}{g}$ est défini par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pour $x \in A$ et $g(x) \neq 0$.
somme de réels

Toutes définis $A \rightarrow \mathbb{R}$, sauf le quotient, il faut que $g(x) \neq 0$.

Quelques classes de fonctions

Fonctions polynomiales

Fonctions rationnelles

Fonctions exponentielles

Fonctions trigonométriques

Fonctions polynomiales

Définition

Une **fonction polynomiale** est une fonction qui à x associe un polynôme en x . C'est-à-dire, une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On appelle n le **degré** de la fonction polynomiale *lorsque $a_n \neq 0$* . Les fonctions polynomiales de degré 0 sont appelées des **fonctions constantes** et les fonctions de degré 1 sont appelées des **fonctions linéaires** ou **affines**.

$$\text{deg } 0: f(x) = a_0 \neq 0$$

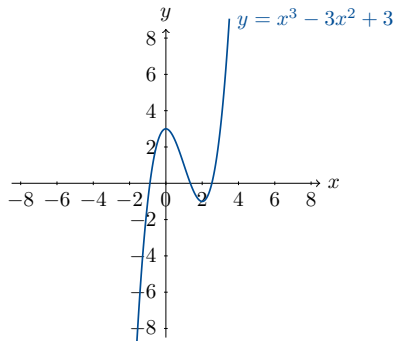
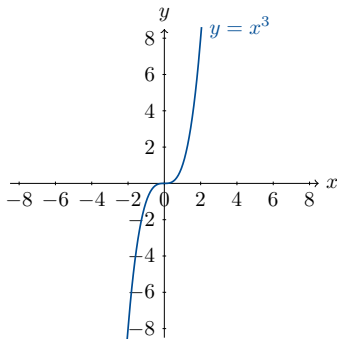
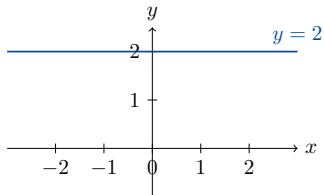
$$\text{deg } 1: f(x) = a_0 + a_1x \quad \text{avec } a_1 \neq 0.$$

Exemples de fonctions polynomiales

Exemples

- ▶ La fonction identité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est une fonction polynomiale. Il s'agit d'une fonction linéaire.
- ▶ La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est une fonction polynomiale.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2$ (c'est une fonction constante)
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$

Exemples de graphes de fonctions polynomiales



Fonctions rationnelles

Définition

Si P et Q sont deux fonctions polynomiales, leur quotient R est appelé une **fonction rationnelle** :

$$R : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec $A := \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q(x) \neq 0\}$.

Exemple d'une fonction rationnelle

Exemple

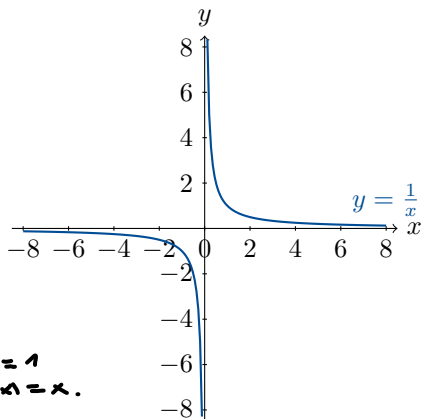
Une fonction
rationnelle :

$$f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec $P(x) = 1$
 $Q(x) = x.$

$$\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$



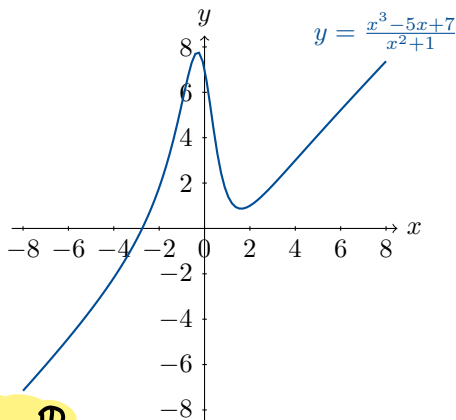
Exemple d'une fonction rationnelle

Exemple

Une fonction
rationnelle :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^3 - 5x + 7}{x^2 + 1}.$$



$$Q(x) = x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et donc $\neq 0$

Fonctions exponentielles

Définition

Soit b une **base**, c'est-à-dire un nombre réel strictement positif et différent de 1. L'**exponentielle de base b** est la fonction

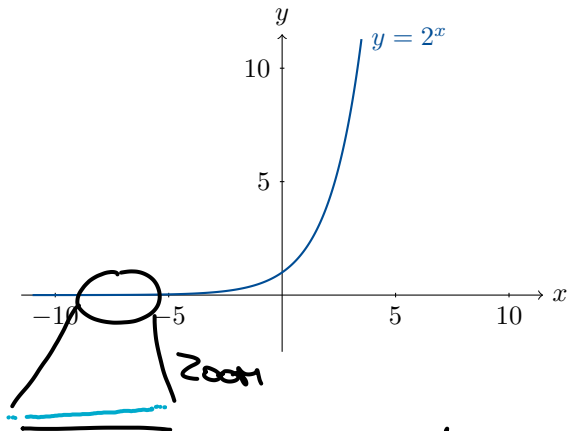
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto b^x. \end{aligned}$$

Exemple d'une fonction exponentielle

Exemple

Une fonction
exponentielle :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto 2^x. \end{aligned}$$



Ne touche nulle part l'axe des abscisses
mais s'en rapproche indéfiniment

Croissance exponentielle

Remarque

La croissance d'une fonction exponentielle est extrêmement rapide et dépasse largement toute croissance polynomiale. Considérons par exemple les fonctions sur $\mathbb{R}_0^+$ définies par $f(x) := 2^x$ et $g(x) := x^{10}$. Pour des petites valeurs de x , on a que $g(x)$ est beaucoup plus grand que $f(x)$: $f(2) = 4 < g(2) = 1024$. Mais autour de $x = 58,77$ on a $f(x) = g(x)$ et pour $x = 59$ on a déjà $f(59) - g(59) \approx 6,53 \cdot 10^{17}$!

Algorithme de complexité exponentielle

Suite Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, F_n, \dots$

$\begin{array}{ccccccc} & & \text{"} & \text{"} & & \text{"} & \\ & & 1+1 & 2+1 & & 5+8 & \\ & & \text{"} & \text{"} & & \text{"} & \end{array}$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Exemple

Considérons l'algorithme suivant, pour calculer le n -ième nombre de Fibonacci.

```
1 def fibonacci(n):  
2     if n <= 1:  
3         return n  
4     else:  
5         return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

On a $\mathcal{C}(n) \approx 2^n$

$$\begin{array}{c} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\ \quad \quad \quad F_{n-2} + F_{n-3} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\ \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\ F_{n-3} + F_{n-4} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \end{array}$$

Le nombre d'Euler

Remarque (Le nombre e)

Il y a une fonction exponentielle particulière qui aura un rôle spécial. Il s'agit de l'exponentielle en base e où e est la constante d'Euler.

On a que $e \approx 2,71828182845905$.

Plus tard dans ce cursus, il deviendra plus clair pourquoi e et la fonction exponentielle de base e sont si spéciales.

Fonctions trigonométriques

Définition

$\sin$, $\cos$, $\tan$ et $\cot$ transforment une mesure d'angle, donc un réel, en un réel. On peut formellement définir les fonctions :

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$$

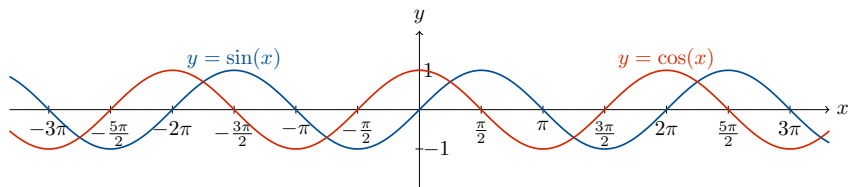
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

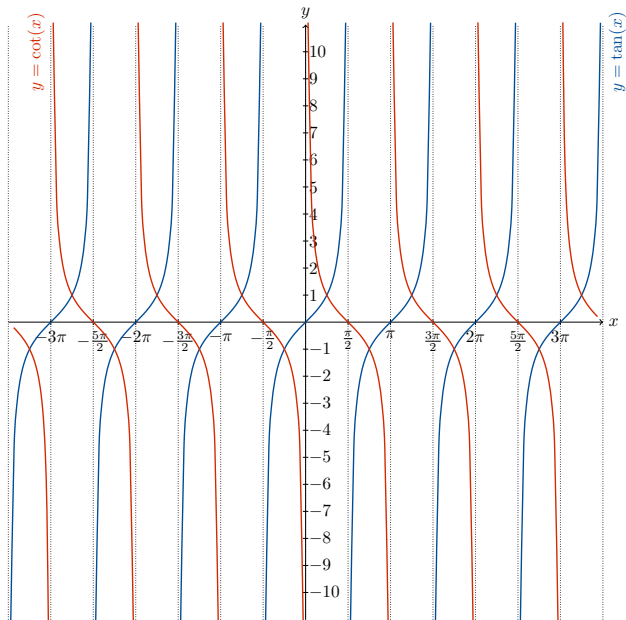
car $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.

car $\sin(k\pi) = 0$.

Graphes des fonctions sin et cos



Graphes des fonctions tan et cot



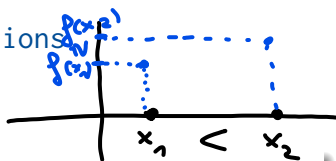
Propriétés de fonctions

Croissance et décroissance

Parité

Périodicité

Injectivité, surjectivité et bijectivité



Définition

Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite

- ▶ **croissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ▶ **strictement croissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$;
- ▶ **décroissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- ▶ **strictement décroissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.

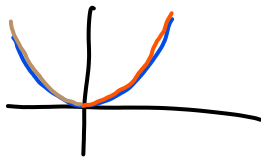
Exemples de fonctions croissantes et décroissantes

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$$

Exemples

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est strictement croissante.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -x + 3$ est strictement décroissante.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ est strictement croissante.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3$ est à la fois croissante et décroissante !
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = 3 \geq 3 = f(x_2)$$



! Attention

La croissance d'une fonction dépend fortement de son domaine.

Exemples

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante.
- ▶ $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est strictement croissante.
- ▶ $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est strictement décroissante.

Exemple

En général, toutes les fonctions de calcul de complexité sont croissantes. En effet, quand la taille de la donnée d'entrée est plus grand, la quantité de ressources augmente !

Définition

Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite
domaine symétrique % à 0

- **pair** si pour tout $x \in A, -x \in A$ et $f(x) = f(-x)$;
- **impair** si pour tout $x \in A, -x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

↳ Rq: si $0 \in A, -0 = 0 \in A$
$$f(0) = -f(-0) = -f(0)$$
$$\Rightarrow f(0) = 0.$$

Exemples de fonctions paires et impaires

et les domaines sont symétriques v.

Exemple

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est pair. $\rightarrow f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2 + 6$ est pair.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est impair. $\rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^9 - 3x^6 - 12$ n'est ni pair ni impair.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est impair.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ est pair.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3^x$ n'est ni pair, ni impair.

Sommes de fonctions (im)paires

Proposition

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- ▶ Si f et g sont paires alors $f + g$ est .
- ▶ Si f et g sont impaires alors $f + g$ est .

Preuve.



! Attention

La somme d'une fonction paire avec une fonction impaire n'est pas nécessairement paire ou impaire.

Périodicité

Définition

Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite **périodique de période T** si pour tout $x \in A$ tel que $x + T \in A$, on a $f(x) = f(x + T)$.

Exemples de fonctions périodiques

Exemples

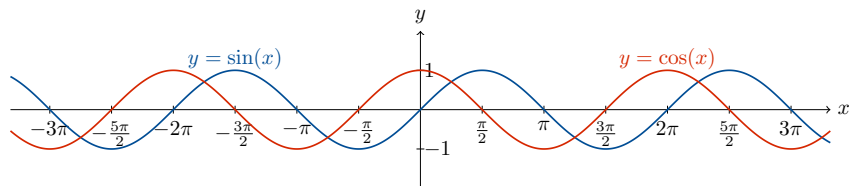
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période 2π . Elle est également périodique de période 4π et 6π .
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x) + \cos(x) + \tan(x) + \cot(x)$ est périodique de période 2π .
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$ est périodique de période π .

Période minimale

Remarque

En général, toute fonction périodique de période T est aussi périodique de période $2T$, $3T$, etc. Il est coutume d'indiquer la plus petite période possible, car ceci nous donne plus d'information sur la fonction.

Allure du graphe de fonctions périodiques



Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définition

Soit f une fonction $A \rightarrow B$. Elle est dite

- ▶ **injective** si pour tous $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ou la formulation équivalente : pour tous $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ on a $x_1 = x_2$. En d'autres mots

tout élément de B est image d'au plus un élément de A ;

- ▶ **surjective** si son ensemble image est égal à son ensemble d'arrivée. C'est-à-dire que pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. En d'autres mots

tout élément de B est image d'au moins un élément de A ;

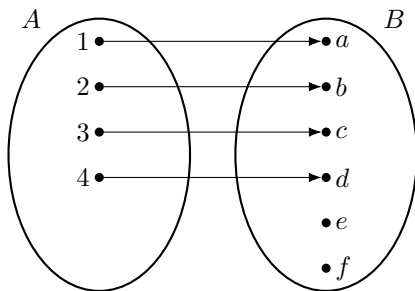
- ▶ **bijective** si f est injective et surjective. En d'autres mots

tout élément de B est image d'un unique élément de A .

Exemple d'une fonction injective

Exemple

$f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ définie par



$$f(1) = a$$

$$f(2) = b$$

$$f(3) = c$$

$$f(4) = d.$$

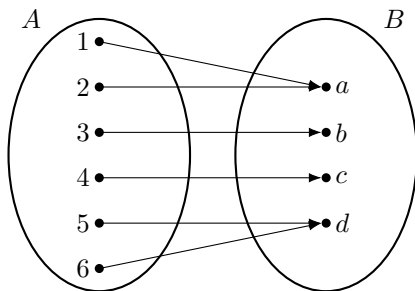
f est

f n'est pas surjective, car $e, f \in B$ n'ont pas d'antécédent.

Exemple d'une fonction surjective

Exemple

$f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$ définie par



$$f(1) = a$$

$$f(2) = a$$

$$f(3) = b$$

$$f(4) = c$$

$$f(5) = d$$

$$f(6) = d.$$

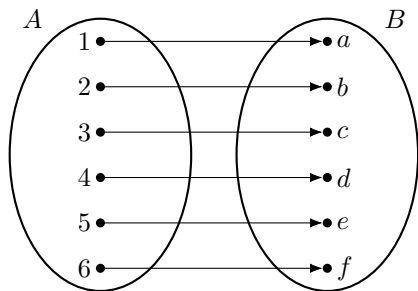
f est

f n'est pas

Exemple d'une fonction bijective

Exemple

$f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ définie par



$$f(1) = a$$

$$f(2) = b$$

$$f(3) = c$$

$$f(4) = d$$

$$f(5) = e$$

$$f(6) = f.$$

Exemples de fonctions injectives/surjectives

Exemple

Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'ULB.

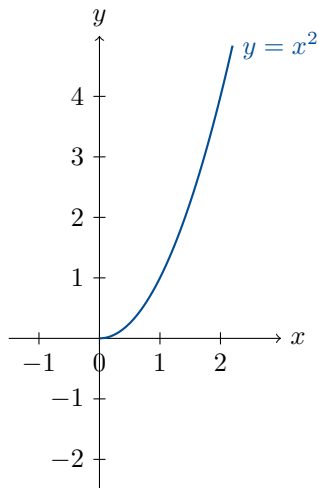
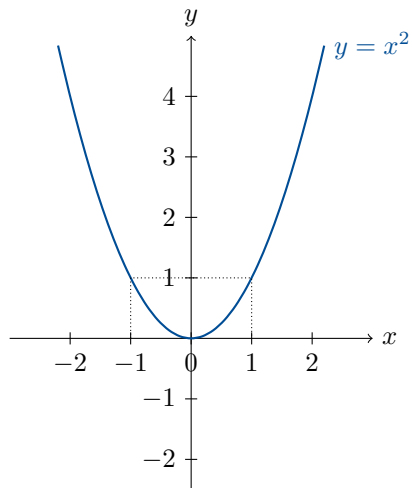
- Soit B est l'ensemble des sections proposées par notre université et f la fonction $A \rightarrow B$ qui associe chaque étudiant(e) à sa section. Alors f est surjective, mais pas injective.
- Soit B est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ et f la fonction $A \rightarrow B$ qui associe chaque étudiant(e) à son numéro de matricule. Alors f est , mais pas

Importance des ensembles de définition

! Attention

L'injectivité, surjectivité et bijectivité est très dépendant des ensembles de départ et d'arrivé de la fonction.

Exemples de fonctions injectives/surjectives



Exemples de fonctions injectives/surjectives

Exemples

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ est injective, mais pas surjective.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ est surjective.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est bijective.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ n'est ni injective, ni surjective.
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \cos(x)$ n'est ni injective, ni surjective, mais elle est surjective si on considère $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \cos(x)$.

Fonctions réciproques

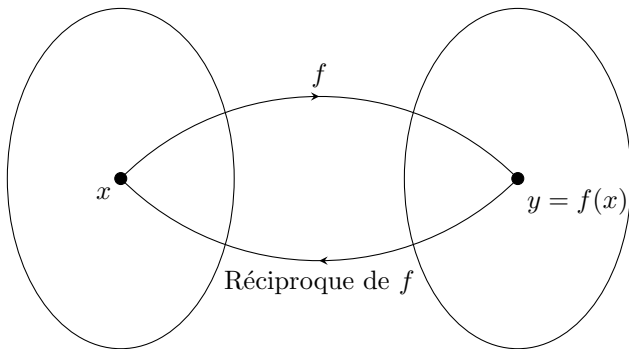
Fonctions racines

Fonctions logarithmiques

Fonctions trigonométriques réciproques

Fonctions réciproques: motivation

Si une fonction représente une action ou une transformation (par exemple “ajouter 5”), on peut se demander quel est l’action qui permet de revenir au point de départ (ici, “soustraire 5”) ? Quel est le chemin de retour ?



Fonctions réciproques: définition

Définition

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est dite **inversible** s'il existe une fonction $g : B \rightarrow A$ telle que

Pour tout $x \in A$, on a $(g(f(x))) = x$

Pour tout $y \in B$, on a $(f(g(y))) = y$.

En d'autres mots, $g \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ g = \text{Id}_B$. On appellera alors g l'____ ou la ____ de f et on notera $g =$ ____.

Proposition

Si f est la réciproque de g alors g est la réciproque de f .
C'est-à-dire $(f(g(y))) = y$.

Exemple de fonction réciproque

Exemple

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$$

alors on a

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y - 5$$

est l'inverse de f .

Ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$

! Attention

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$, on a que

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y - 5$$

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

L'exposant -1 porte sur la *fonction* f . Ceci n'est pas à confondre avec

$$\frac{1}{f} : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{f}(x) = (f(x))^{-1} = \frac{1}{x+5}$$

$$f \circ \frac{1}{f} : \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1.$$

Ici, l'exposant -1 s'applique à $f(x)$, qui est un nombre réel.

Condition nécessaire est suffisante pour l'inversibilité

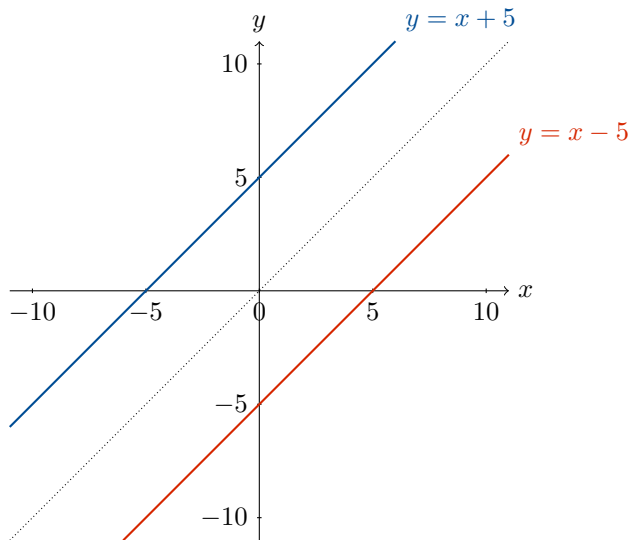
Proposition

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est inversible si et seulement si elle est bijective.

Preuve.



Allure du graphe de la fonction réciproque



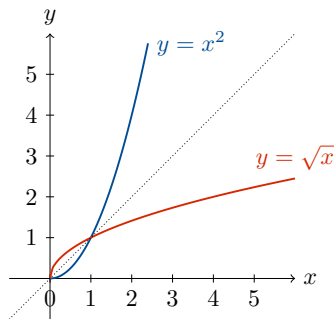
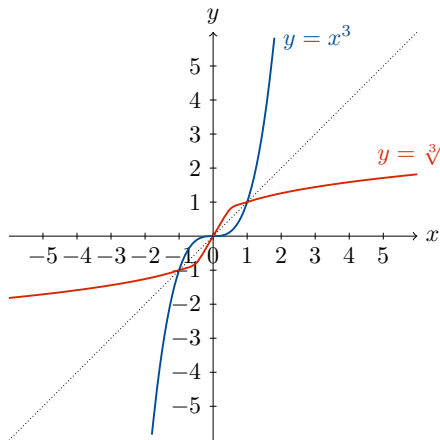
- ▶ Si n est impair, la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

- ▶ Si n est pair, la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^n$ est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

Graphes de fonctions racines



Fonctions logarithmiques

Pour un $b \in \mathbb{R}_0^+$, considérons la fonction bijective

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto b^x.$$

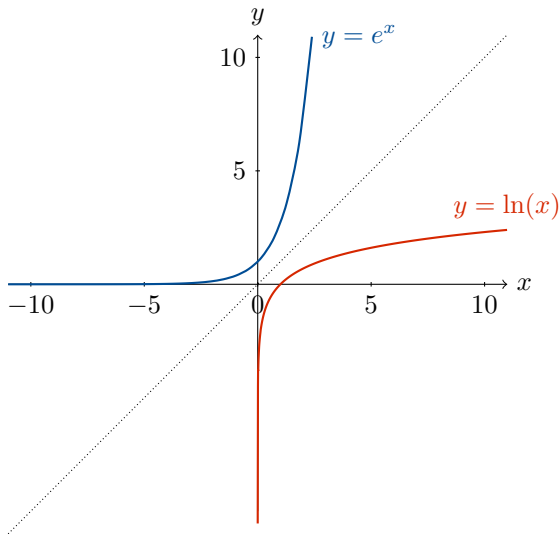
Sa fonction réciproque est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \log_b(y).$$

Définition

Le **logarithme naturel** est le logarithme de base e . C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto e^x$. Elle se dénote $\ln$.

Graphes de fonctions logarithmiques



Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions suivantes sont bijectives :

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$[0, \pi] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \cos(x)$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x).$$

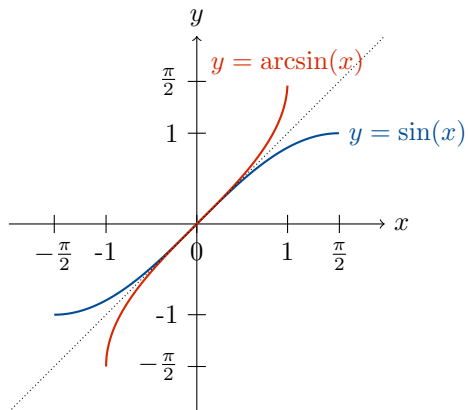
Leurs fonctions réciproques :

$$[0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : y \mapsto \arcsin(y)$$

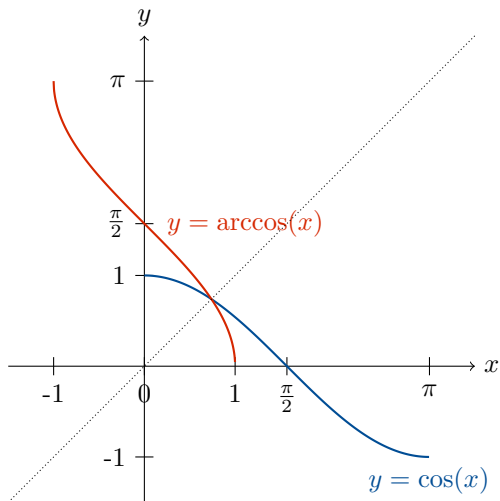
$$[0, 1] \rightarrow [0, \pi] : y \mapsto \arccos(y)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : y \mapsto \arctan(y).$$

Graphe de arcsin



Graphe de arccos



Graphe de arctan

