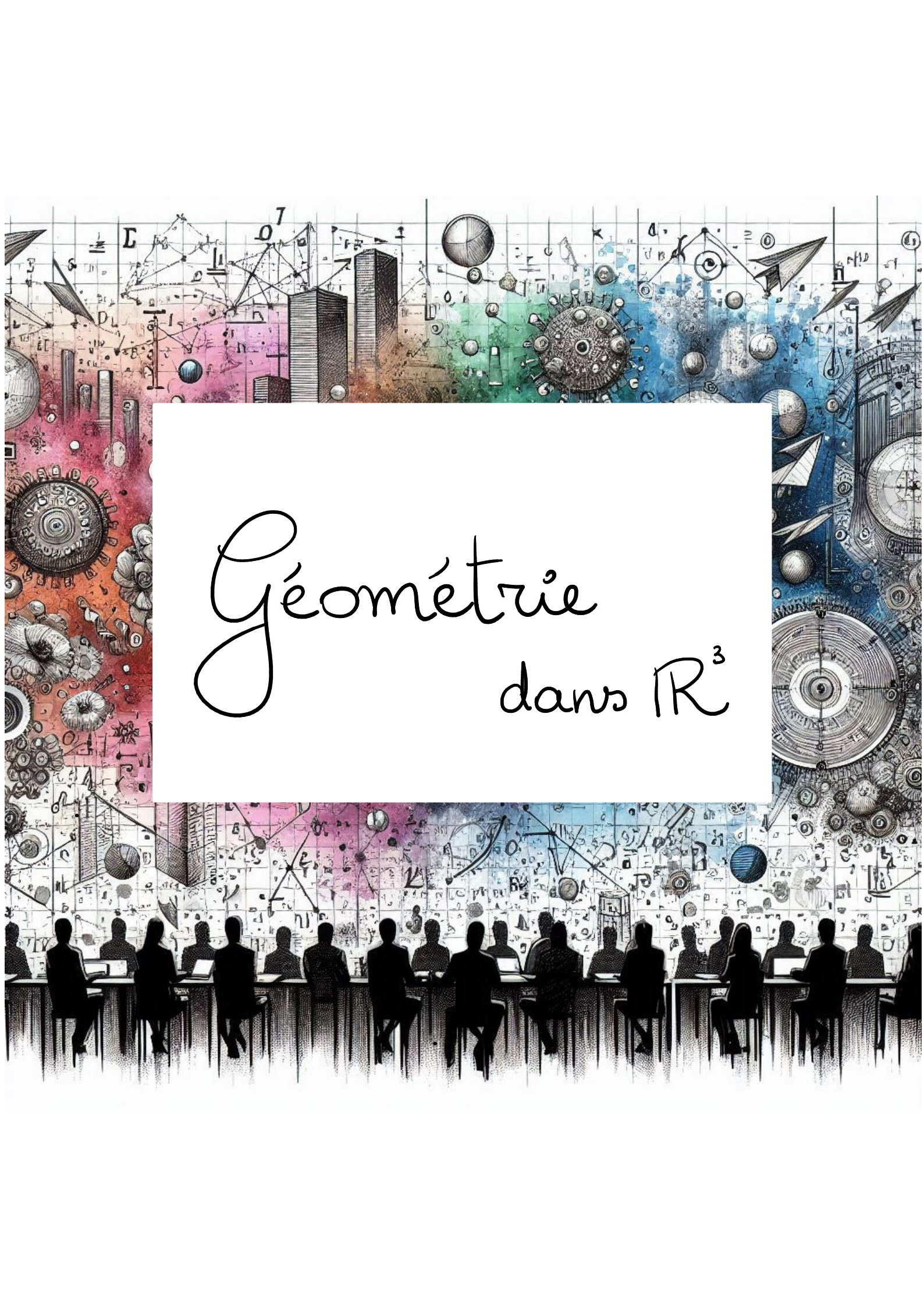




# Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

## NORME

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \text{longueur du vecteur}$$

## PRODUIT

\* SCALAIRE •  $\langle (x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b) \rangle = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

•  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha$   
angle entre  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

\* VECTORIEL

$$(x_a, y_a, z_a) \times (x_b, y_b, z_b) = \begin{vmatrix} x_a & x_b & u_x \\ y_a & y_b & u_y \\ z_a & z_b & u_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cancel{x_a} & \cancel{x_b} & u_x \\ y_a & y_b & \cancel{u_y} \\ z_a & z_b & \cancel{u_z} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_a & x_b & \cancel{u_x} \\ \cancel{y_a} & \cancel{y_b} & \cancel{u_y} \\ z_a & z_b & \cancel{u_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{x_a} & \cancel{x_b} & \cancel{u_x} \\ y_a & y_b & \cancel{u_y} \\ \cancel{z_a} & \cancel{z_b} & \cancel{u_z} \end{vmatrix}$$

$$= (y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - x_a z_b, x_a y_b - y_a x_b)$$

## ANGLES

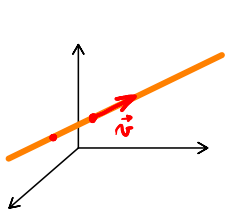
\*  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

ça rime!

\*  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

# EQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$

## \* D'UNE DROITE $d$

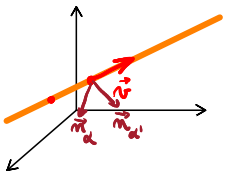


$\vec{r}$  vecteur directeur

$(a, b, c)$  point de la droite

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \vec{r} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + r_x \cdot t \\ y = b + r_y \cdot t \\ z = c + r_z \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-a}{r_x} = \frac{y-b}{r_y} = \frac{z-c}{r_z}$$

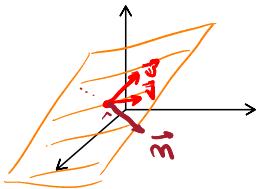
vectorielle                      paramétriques                      cartésienne



$$d \equiv \begin{cases} \text{plan } \alpha \\ \text{plan } \alpha' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_d = \vec{m}_\alpha \times \vec{m}_{\alpha'}$$

intersection de 2 plans

## \* D'UN PLAN $\Pi$



$\vec{u}, \vec{v}$  vecteurs directeurs

$(a, b, c)$  point du plan

$\vec{n}$  vecteur normal

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + u_x t + v_x \lambda \\ y = b + u_y t + v_y \lambda \\ z = c + u_z t + v_z \lambda \end{cases} \Leftrightarrow n_x(x-a) + n_y(y-b) + n_z(z-c) = 0$$

vectorielle                      paramétriques                      cartésienne

3.19. Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on donne les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  de composantes respectives  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 3, -4)$  et  $(2, 2, -2)$ . On demande

- la longueur de  $\vec{v}_2$ ;
- l'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$ ;
- le produit vectoriel  $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ .

a.  $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

La longueur de  $\vec{v}_2$  est 5.

b.  $\alpha := \text{angle entre } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_3$

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_3\| \cdot \cos \alpha$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} \cos \alpha$$

$$0 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{64} \cos \alpha$$

$$\arccos(0) = \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

L'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

c.  $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (0-6)u_z + (-6-(-8))u_x - (0-(-8))u_y$$

$$= 2u_x - 8u_y - 6u_z = (2, -8, -6)$$

Le produit vectoriel de  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  est  $(2, -8, -6)$ .

3.25. Dans  $\mathbb{R}^3$ , quelle est l'équation cartésienne  
e. passant par les points  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 6, 0)$  et  $(0, 0, 5)$ ;

vecteurs directeurs  $\vec{v}_1 = (2, -6, 0)$

$$\vec{v}_2 = (2, 0, -5)$$

vecteur normal  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & u_x \\ -6 & 0 & u_y \\ 0 & -5 & u_z \end{vmatrix} = (+30, +10, +12)$

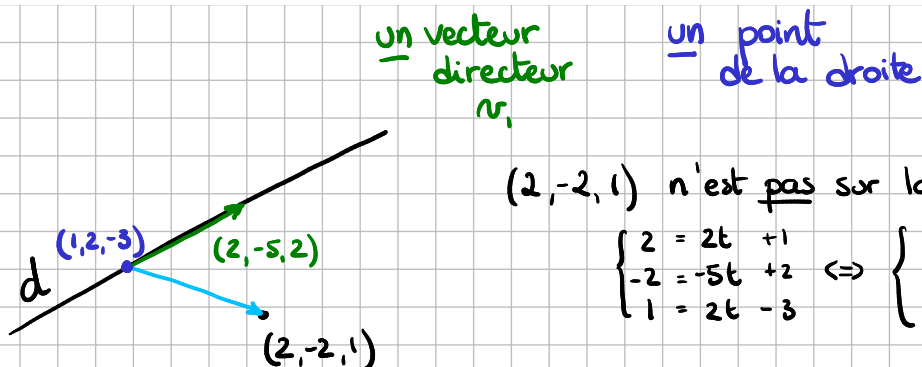
$$\vec{n} = (15, 5, 6)$$

équation  $15(x-2) + 5(y-0) + 6(z-0) = 0$

L'équation du plan est  $15x + 5y + 6z = 30$

3.29. Quelle est l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par le point  $a = (2, -2, 1)$  et qui contient la droite  $D$  d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2 = 2t + 1 \\ -2 = -5t + 2 \\ 1 = 2t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 4/5 \\ t = 2 \end{cases} \text{ impossible}$$

$$v_2 = (2-1, -2-2, 1+3) = (1, -4, 4)$$

vecteur normal  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & u_x \\ -4 & -5 & u_y \\ 4 & 2 & u_z \end{vmatrix} = (-8+20, -2+8, -5+8) \rightarrow (4, 2, 1)$

équation  $4(x-1) + 2(y-2) + (z+3) = 0$

L'équation du plan est  $4x + 2y + z = 5$

3.32. Trouver l'équation du plan  $\pi$  de  $\mathbb{R}^3$  passant par la droite d'équations

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$d_2 \equiv \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

①  $d_1 \subseteq \pi$  i)  $\Rightarrow \vec{n}_{d_1}$  est un vecteur directeur de  $\pi$

$$\vec{n}_{d_1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = u_x - 2u_y - u_z - (2u_z + u_x + u_y) \\ = 0u_x - 3u_y - 3u_z = (0, -3, -3)$$

ii) tout point de  $d_1$  appartient à  $\pi$ .

Choisissons un point de  $d_1$ , par exemple celui où  $z=0$ :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y - 0 - 1 = 0 \\ 2x - y + 0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2(1 - y) - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 5 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 5/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (-2/3, 5/3, 0)$  est un point du plan  $\pi$ .

②  $d_2 \parallel \pi \Rightarrow \vec{n}_{d_2}$  est un vecteur directeur de  $\pi$

$$\vec{n}_{d_2} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0u_x - u_y + 5u_z - (2u_z + 0u_y - u_x) \\ = u_x - u_y + 3u_z = (1, -1, 3)$$

③ Equation cartésienne de  $\pi$ :

$$i) m_\pi = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9u_x - 3u_y - 0u_z - (3u_x - 3u_z + 0u_y) = -12u_x - 3u_y + 3u_z \\ = (-12, -3, 3)$$

$\Rightarrow \pi \equiv -12x - 3y + 3z + d = 0$  et  $(-2/3, 5/3, 0)$  satisfait cette équation.

$$\Rightarrow -12 \cdot \frac{-2}{3} - 3 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot 0 + d = 0 \Leftrightarrow 8 - 5 = -d \Leftrightarrow d = -3$$

$\Rightarrow$  Le plan  $\pi$  a pour équation  $\pi \equiv -12x - 3y + 3z - 3 = 0$ .

3.34. Pour quelle valeur de  $\lambda$  la droite de  $\mathbb{R}^3$  d'équations

$$d = \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan  $\pi$  d'équation  $6x - y + 3z - 5 = 0$  ?

$$d // \pi \Leftrightarrow \vec{n}_d \perp \vec{n}_\pi$$

$$\text{On } \vec{n}_d = (2, 3, \lambda) \text{ et } \vec{n}_\pi = (6, -1, 3).$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{n}_d \perp \vec{n}_\pi &\Leftrightarrow \langle \vec{n}_d, \vec{n}_\pi \rangle = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) + \lambda \cdot 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\lambda = -12 + 3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(-9) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -3 \end{aligned}$$

La droite  $d$  et le plan  $\pi$  sont parallèles si et seulement si  $\lambda = -3$ .

3.40. Trouver la (ou les) valeur(s) de  $k$  pour que le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + ky - 2z - 9 = 0 \equiv \alpha$

d. fasse un angle de mesure  $\pi/3$  avec le plan  $2x - 2y + z = 0 \equiv \beta$

Deux plans font un angle de mesure  $\alpha$  si et seulement si leurs vecteurs normaux  $\hat{\alpha}$  également.

$$\gamma := \angle(\alpha, \beta) = \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \angle((1, k, -2), (2, -2, 1))$$

$$\rightarrow \|\vec{n}_\alpha\| \|\vec{n}_\beta\| \cos(\gamma) = \langle \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta \rangle = 1 \cdot 2 + k(-2) + (-2) \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cos \frac{\pi}{3} = \langle \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta \rangle = -2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5+k^2} \cdot \sqrt{9} \cdot \frac{1}{2} = -2k$$

$$\Leftrightarrow \left(-3 \sqrt{5+k^2}\right)^2 = (4k)^2 \quad -3\sqrt{5} = 4k \Rightarrow k < 0$$

$$\Rightarrow 9(5+k^2) = 16k^2 \Leftrightarrow 45 = 16k^2 - 9k^2 \Leftrightarrow \frac{45}{7} = k^2 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{45}{7}} = 3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Pour que les plans fassent un angle de mesure  $\pi/3$ , il faut que  $k = \pm 3\sqrt{\frac{5}{7}}$ .

3.41. Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on donne les droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équations

$$D_1 \equiv x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{2}, \quad D_2 \equiv x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{2}$$

et les plans  $\alpha$  et  $\beta$  d'équations

$$\alpha \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0, \quad \beta \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$$

On demande de calculer l'angle entre

b.  $D_1$  et  $\alpha$ ;  $\gamma := \angle(D_1, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \angle(r_{D_1}, n_\alpha) = \frac{\pi}{2} - \angle((1, -1, 2), (2, -2, 1))$

$$1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = \langle r_{D_1}, n_\alpha \rangle = \|r_{D_1}\| \cdot \|n_\alpha\| \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 6 = \langle r_{D_1}, n_\alpha \rangle = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{9}} = \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} = \cos \alpha \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$$

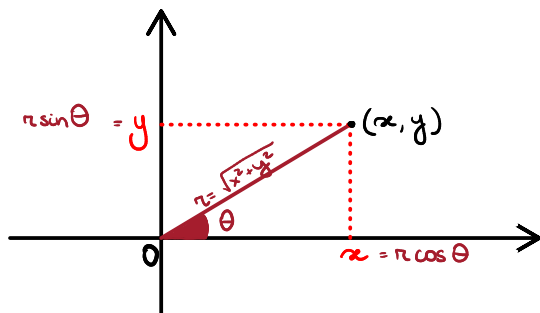
Le plan  $\alpha$  et la droite  $D_1$  font un angle de mesure  $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$



# Systemes de coordonnées



## DANS LE PLAN $\mathbb{R}^2$

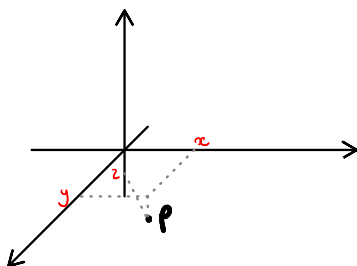


coordonnées  
cartésiennes  $(x, y)$   
 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

polaires  
 $(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$   
ou  $\pi + \arctan \frac{y}{x}$   
 $(r, \theta)$

## DANS L'ESPACE $\mathbb{R}^3$

cartésiennes



cylindriques

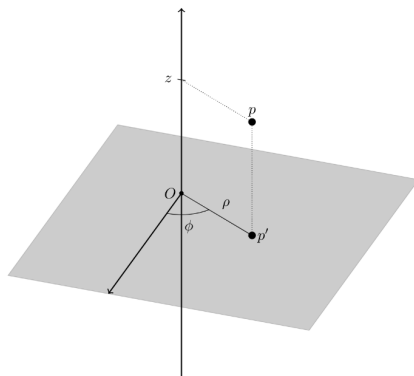


FIGURE 3.13 – Coordonnées cylindriques

sphériques

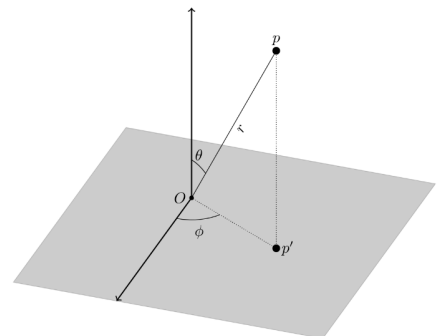


FIGURE 3.14 – Coordonnées sphériques

$(x, y, z)$

$(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}, z)$

$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan \frac{y}{x}, \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$   
ou  $\pi + \arctan \frac{y}{x}$

$(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$

$(\rho, \phi, z)$

$(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$

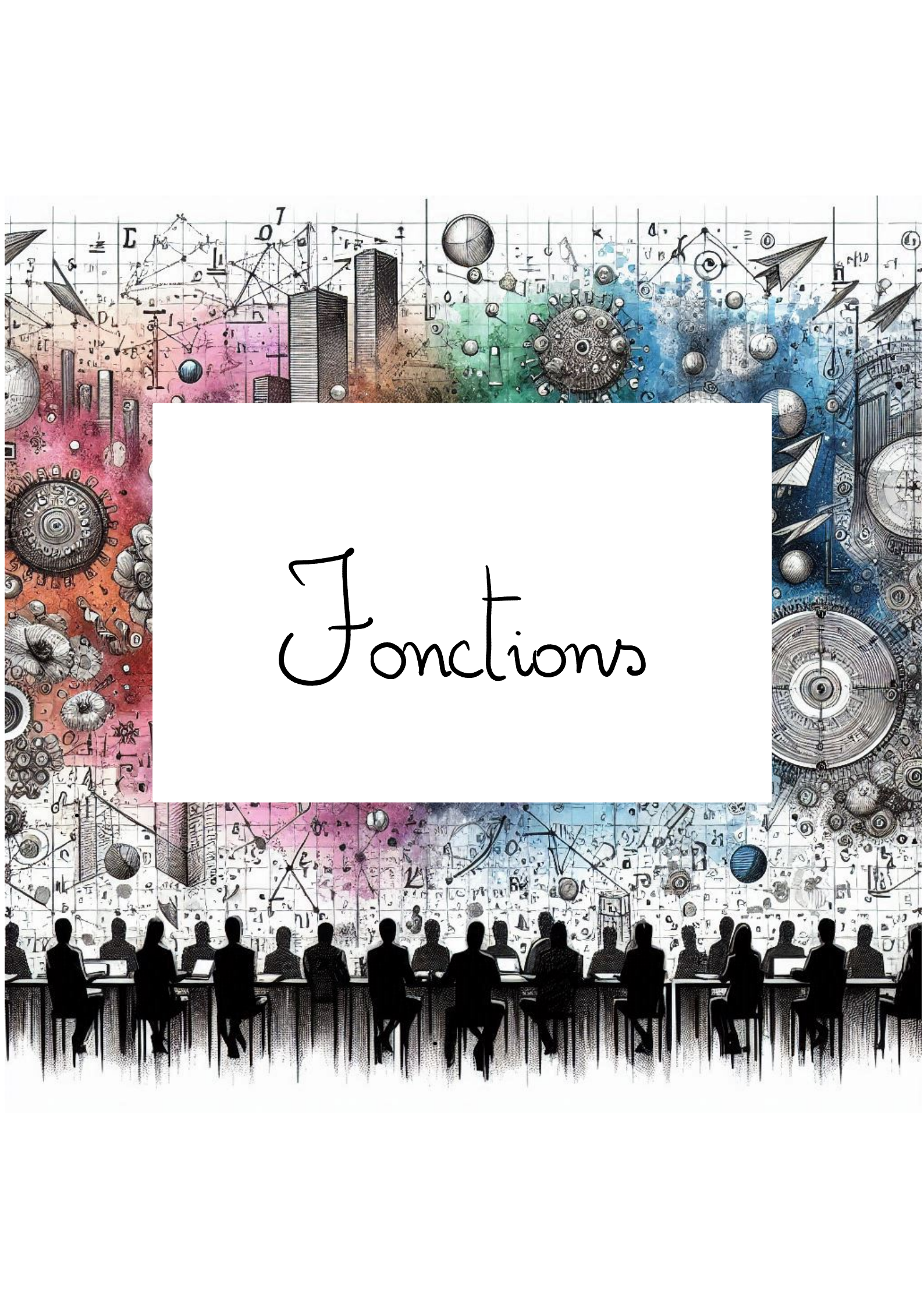
$(r, \phi, \theta)$

**3.48.** Complétez le tableau suivant décrivant des points de  $\mathbb{R}^2$  en coordonnées cartésiennes et polaires.

| Coordonnées cartésiennes $(x, y)$ | Coordonnées polaires $(r, \theta)$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| $(-1, -1)$                        | $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$               |
|                                   | $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$      |

•  $p = (-1, 1)$   
 $\Rightarrow \|\vec{p}\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$  et  $\text{tg } \theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \approx \pi + \frac{\pi}{4}$   
 $\uparrow$   
à rejeter car  $x < 0$

$\Rightarrow$  les coordonnées polaires de  $p$  sont  $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$



# Fonctions

## DOMAINE

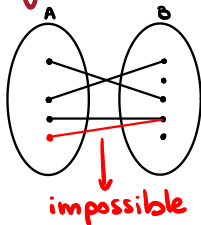
## Conditions d'existence

- racines paires
- fractions
- logarithmes
- trigonométriques

## PROPRIÉTÉS

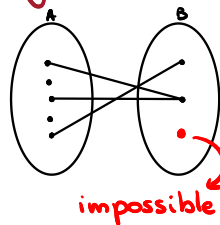
$$f: A \rightarrow B: x \mapsto f(x)$$

### Injective



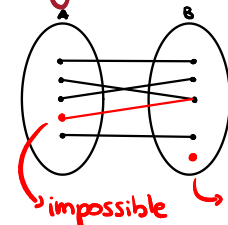
$$\forall x_1, x_2 \in A, \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

### Surjective



$$\forall y \in B, \\ \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y$$

### Bijective



injective et surjective

## RÉCIPROQUE

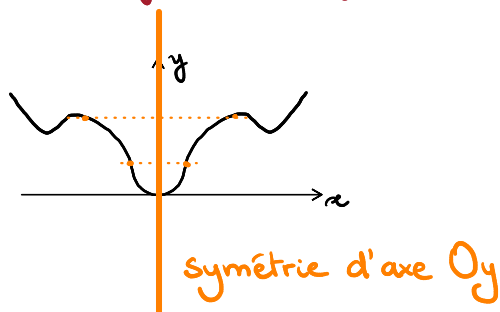
$$g: B \rightarrow A: y \mapsto g(y)$$

⚠ seulement si  $f$  est bijective

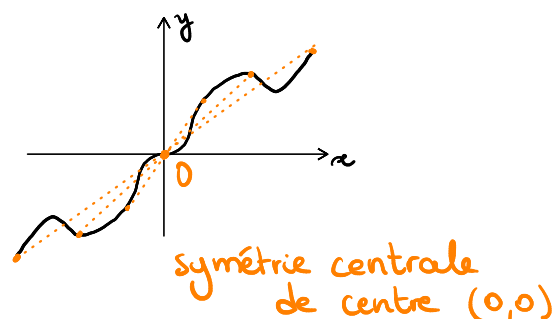
tel que:  $\forall x \in A, g(f(x)) = x$  et  $\forall y \in B, f(g(y)) = y$

## PARITÉ

Paire  $f(-x) = f(x)$



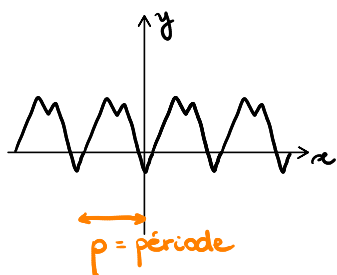
Impaire  $f(-x) = -f(x)$



| $f$          |   | $g$          | $\rightarrow$ | $f+g$        |
|--------------|---|--------------|---------------|--------------|
| paire        | + | paire        | $\rightarrow$ | paire        |
| $\neg$ paire | + | paire        | $\rightarrow$ | $\neg$ paire |
| $\neg$ paire | + | $\neg$ paire | $\rightarrow$ | ?            |

| $f$            |   | $g$            | $\rightarrow$ | $f+g$          |
|----------------|---|----------------|---------------|----------------|
| impaire        | + | impaire        | $\rightarrow$ | impaire        |
| $\neg$ impaire | + | impaire        | $\rightarrow$ | $\neg$ impaire |
| $\neg$ impaire | + | $\neg$ impaire | $\rightarrow$ | ?              |

## PERIODICITÉ



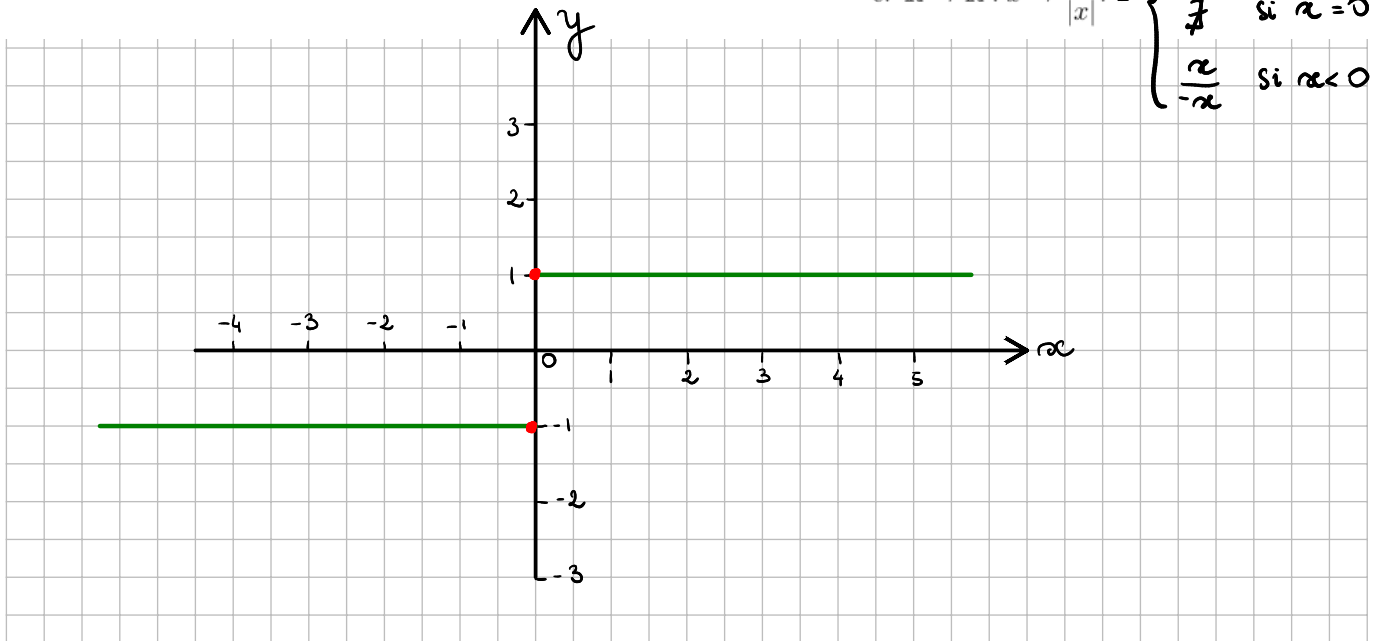
$$f(x) = f(x + p)$$

$p$  est le + petit nombre satisfaisant cette propriété

|         | $f$ | + | $g$ | $\rightarrow$ | périodique si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$                                        |
|---------|-----|---|-----|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| période | $p$ |   | $q$ |               | si $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ réduite, période $f+g$ est $b \cdot p = a \cdot q$ |

4.1. Tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$c. \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



4.2. Déterminer le plus grand domaine de chacune des fonctions suivantes :

f.  $x \mapsto \sqrt{\sin x}$

c.  $x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

c) CE: • fraction:  $x^2 - 4 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq 4$$

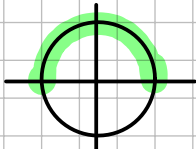
$$\Leftrightarrow x^2 \neq \pm 2$$

$$\text{Dom } g = [1; +\infty[ \setminus \{2\}$$

• racine paire:  $x-1 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \geq 1$

f) CE: racine paire:  $\sin x \geq 0$

$$\text{Dom } h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$$



$$\Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$

4.3. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie  $x$  sur le  $y$  indiqué (ou encore :  $y = f(x)$ ) ;  $A, B$  et  $\lambda$  sont des constantes.

h.  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b.  $y = x^3$

b)  $y = x^3$

• parité

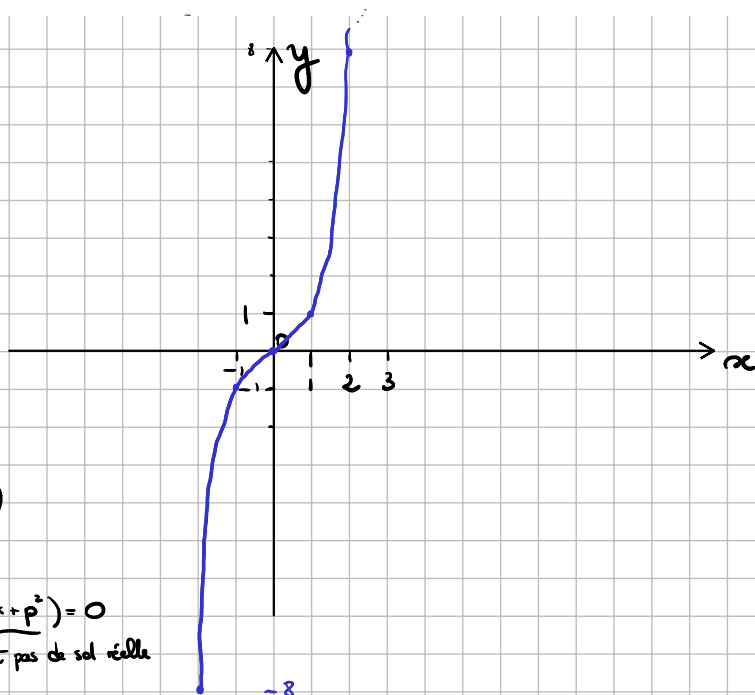
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

• périodicité  $f(x+p) = f(x)$

$$(x+p)^3 = x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3px^2 + 3p^2x + p^3 = x^3 \Leftrightarrow p(3x^2 + 3px + p^2) = 0$$

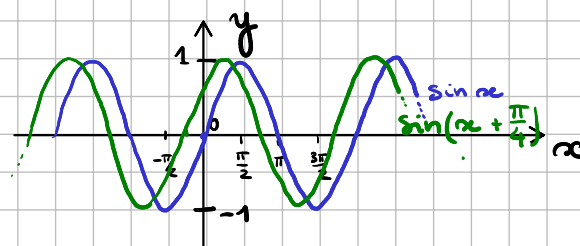
$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow$  pas périodique (n'admet pas de sol réelle)

La fonction  $y = x^3$  est impaire et non-périodique



h)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

• parité  $\times$



• périodicité  $f(x+2\pi) = f(x)$

La fonction  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  est périodique de période  $2\pi$ .  
Elle n'est ni paire ni impaire.

4.4. Pour les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives. Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

d.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ ;

e.  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ ;

i.  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$ ;

d. Injective? Non car il existe 2 éléments de l'ensemble de départ ayant la même image:  
 $d(1.1) = 1 = d(1.2)$  et  $1.1 \neq 1.2$

Surjective? Oui car tout élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent:  
 $\forall z \in \mathbb{Z}, d(z) = z$  et  $z \in \mathbb{R}$ .

Bijective et réciproque? Non car la fonction n'est pas injective.

e. Injective? Oui: Soient  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $d(x) = d(y)$ . Alors,  $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$   
 et, comme  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $x = y$ .

Surjective? Non: il existe des éléments de l'ensemble d'arrivée n'ayant pas d'antécédent:  
 $\nexists x$  tq  $\lfloor x \rfloor = 1.1 \in \mathbb{R}$ .

Bijective et réciproque? Non car la fonction n'est pas surjective.

i. Injective? Oui: soient  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tels que  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ . Alors  $(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2$ , et donc  
 $x = y$ .

Surjective? Oui: Soit  $z \in \mathbb{R}^+$ , alors  $z^2 \in \mathbb{R}^+$  et  $\sqrt{z^2} = z$ . Donc  $z^2$  est bien un  
 antécédent pour  $z$ , quelque soit  $z \in \mathbb{R}^+$ .

Bijective et réciproque? Oui car injective et surjective.

$$\rightarrow y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$$

$\rightarrow$  La réciproque de la fonction  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$   
 est  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto y^2$ .

4.13. Déterminer le plus grand domaine de définition possible des fonctions  $x \mapsto y = y(x)$  suivantes :

$$h: y = \arcsin(\cot 3x)$$

$$\rightarrow \cot g: \text{ argument } \neq 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Rightarrow 3x \neq 0 + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}$$

$$\rightarrow \arcsin: \text{ argument } \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \cot g 3x \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\text{Dom } h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left[ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right] \right) \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

