$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Combinatoire

2.13. Soient 10 boules rouges et 3 boules vertes. De combien de manières

a. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne ?

b. ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne, si seulement la couleur des boules a de l'importance ?

a) $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Il y a $13!$ manières de disposer les boules en ligne.

b) 2 visions des choses, un seul résultat

$$\frac{13!}{3!\,10!} = \binom{13}{3} = \binom{13}{10}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11, 12, 13

3 11 2 1 4 7 8 9 10 12 13 5 6

Il y a 286 manières de disposer les boules en ligne sans distinguer les boules d'une même couleur.

Combien de ces 13 boules faut-il prendre au minimum pour en avoir certainement

d. 3 rouges ?

f. deux de couleurs différentes ?

d) $3 + 3$

Il faut prendre au moins 6 boules pour être sûr d'en avoir au moins 3 rouges

f) $10 + 1$

Il faut prendre au moins 11 boules pour être sûr d'avoir une boule de chaque couleur.

2.14. 17 tâches doivent être assignées à 5 processeurs. De combien de manières est-ce possible

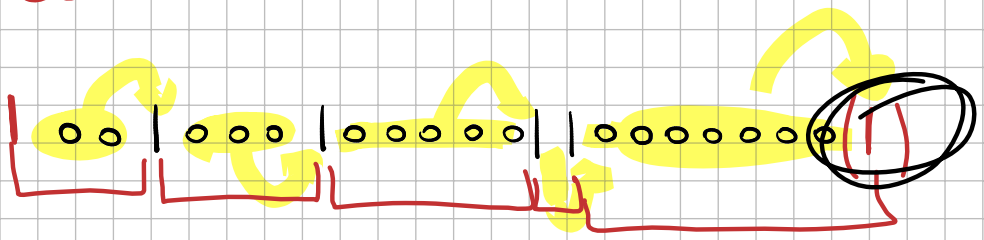
a. en général ? objets — boîtes

b. si chaque processeur traite au plus 3 tâches ?

c. si chaque processeur traite au moins 1 tâche ?

Modélisation :

0 := tâches
1 := processeur



→ Nombre d'assignations = $\binom{21}{4}$

b) 0

c) $\binom{16}{12} = \binom{16}{4}$

2.18. Une adresse IPv4 est une séquence de 4 nombres naturels, chacun de 0 à 255. Évaluez sans calculatrice (via l'approximation $1024 \approx 1000$) le nombre total de ces adresses : est-il de l'ordre du million ? du milliard ? Vérifiez avec une calculatrice.

10^3 : millier
10^6 : million
10^9 : milliard

Exemple d'adresse IPv4 : 101 . 12 . 251 . 0

Nombre d'adresses possibles : $256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256$

$= 256^4 = (2^8)^4 = 2^{32} = 2^2 \cdot 2^{30} = 4 \cdot (2^{10})^3$

$\approx 4 \cdot (1000)^3 = 4 \cdot (10^3)^3$

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 $= 4 \cdot 10^9$

Le nombre total d'adresses est de l'ordre du $= 4$ milliards

↝ Calculatrice : 4 294 967 296

2.21. Le nombre de mots obtenus en réarrangeant les lettres du mot

TALLAHASSEE

est-il plus grand que le nombre similaire en partant plutôt du mot suivant ?

MISSISSIPI

A H T
(11) (10) (9)

TALLAHASSEE : 11 lettres

T : 1
A : 3
L : 2
H : 1
S : 2
E : 2

Il y a $\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$

(A)

réarrangements possibles des lettres de TALLAHASSEE.

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Mississipi : 10 lettres

M : 1
i : 4
S : 4
P : 1

Il y a $\frac{10!}{4! \cdot 4!}$

réarrangements possibles des lettres de Mississipi.

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

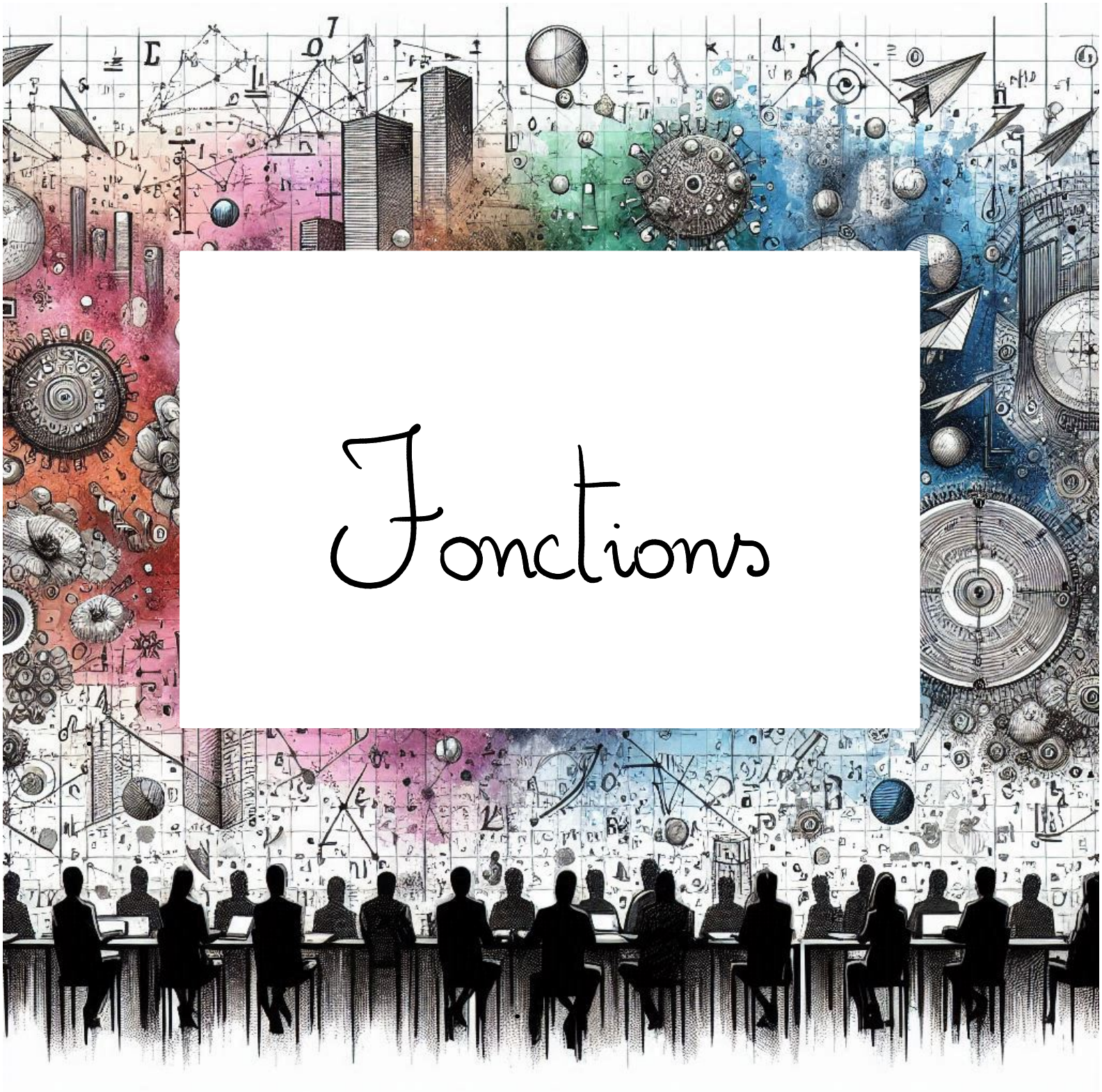
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$4 \cdot 3 \cdot 2$

$10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 > 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

Il y a plus de réarrangements des lettres de TALLAHASSEE que de MISSISSIPI


Fonctions

Domaine C.E ~ racines paires

DOMAINE Conditions d'existence fractions

(~ logarithmes)

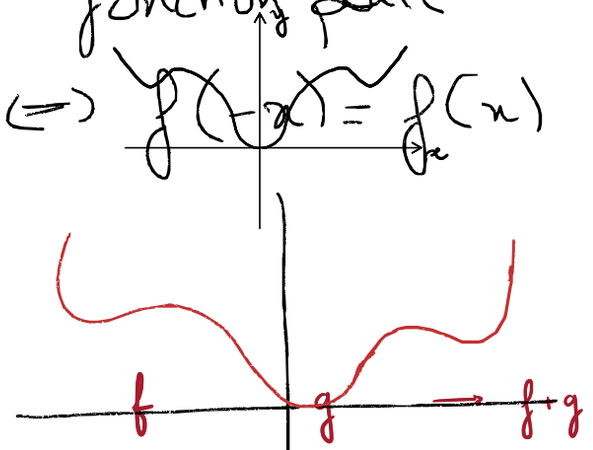
PARITÉ

Parité :

Paire

fonction paire

$\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$



paire + paire → paire

¬paire + paire → ¬paire

¬paire + ¬paire → ~~¬paire~~ ?

P + P = P

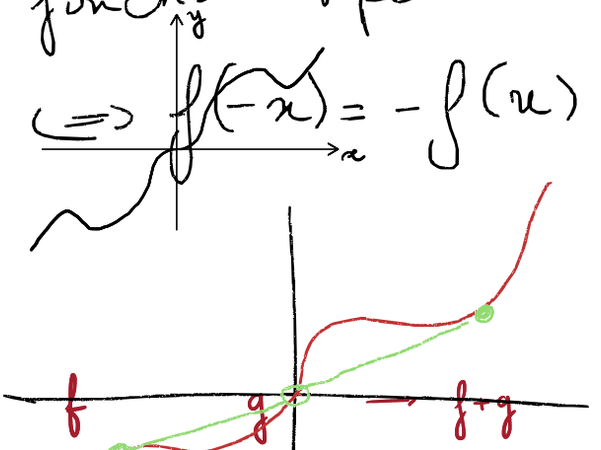
¬P + P = ¬P

¬P + ¬P = ?

Impaire

fonction impaire

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$



impaire + impaire → impaire

¬impaire + impaire → ¬impaire

¬impaire + ¬impaire → impaire

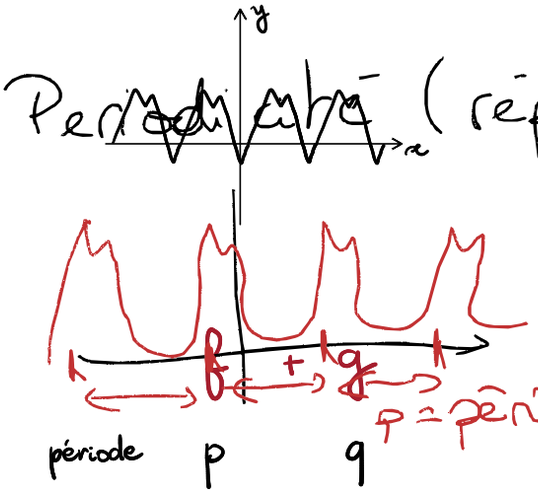
I + I = I

¬I + I = ¬I

¬I + ¬I = ??

PERIODICITÉ ?

Périodique (répétitivité)



période p q

$f(x) = f(x+p)$

f g → f+g

per p per q per si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ t.q. $a, b \in \mathbb{Z}$

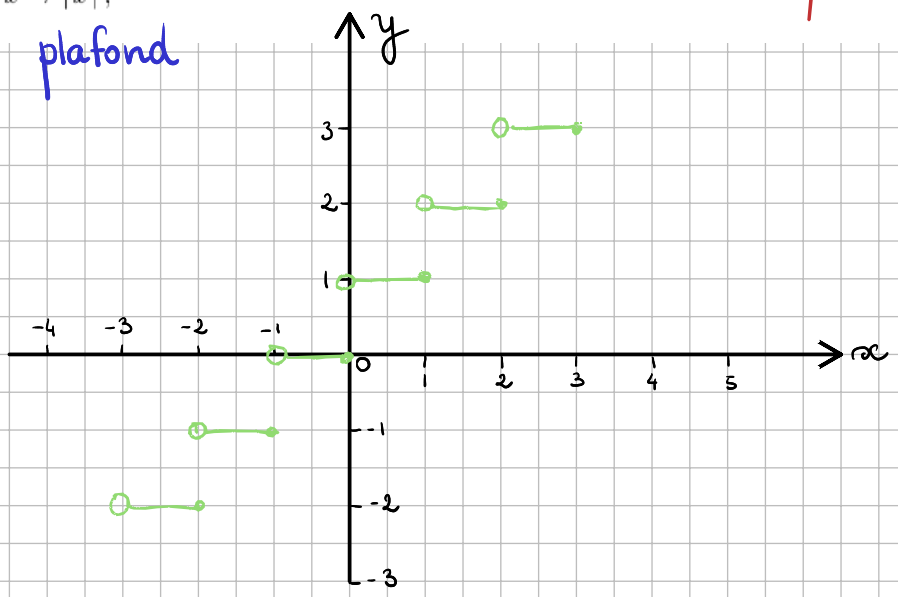
π 4π ~ ~~π~~ 4π

3.1. Tracer le graphe des fonctions suivantes :

$\lceil x \rceil$ $\lfloor x \rfloor$

a. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \lceil x \rceil$;

plafond

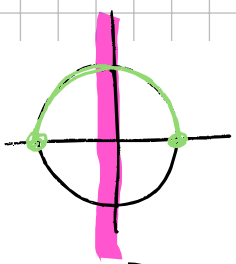


3.2. Déterminer le plus grand domaine de chacune des fonctions suivantes :

b. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$

c. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

f. $x \mapsto \sqrt{\sin x}$



$\sin x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in [0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \ldots$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi; (2k+1)\pi]$

b) CE: $x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$

$ax^2 + bx + c$

$\Delta = 25 - 4.1.6 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{\Delta}}{2.1}$

Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

c) CE: $x^2 - 4 \neq 0$

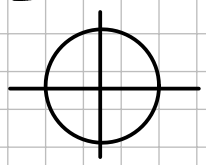
$\Leftrightarrow x \neq \pm 2$

et $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Dom g = $(\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}) \setminus]-\infty, 1[$

= $[1, +\infty[\setminus \{2\}$

f) CE:



Dom h =

3.3. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie x sur le y indiqué (ou encore : $y = f(x)$) ; A, B et λ sont des constantes.

sin, cos : période 2π

ni paire ni impaire

b. $y = x^3$

c. $y = |\sin x|$

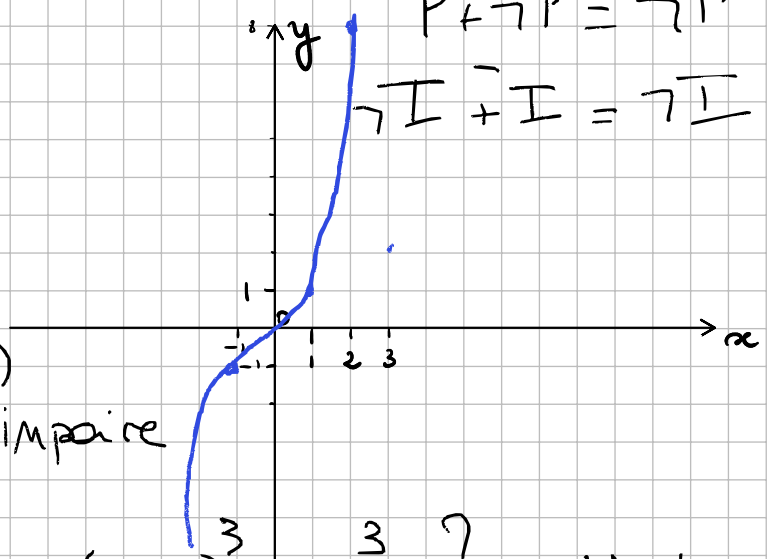
h. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ période 2π $f(-x)$

m. $y = 3\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$P + \neg P = \neg P$

$\neg I + I = \neg I$

b) $y = x^3$



- parité

$f(-x) = (-x)^3$

$= -x^3 = -f(x)$

→ impaire

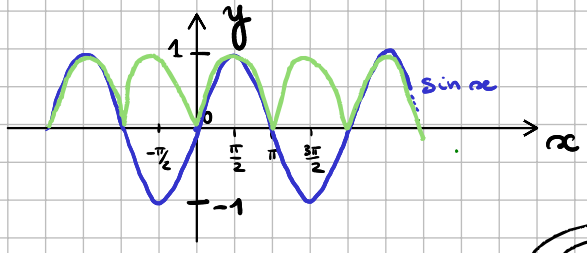
- périodicité

$\exists p \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x) \Leftrightarrow (x+p)^3 = x^3$? → NON

La fonction $y = x^3$ est impaire, non périodique

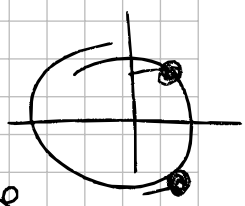
geogebra

c) $y = |\sin x|$



- parité

$|\sin(-x)| = |-\sin(x)|$

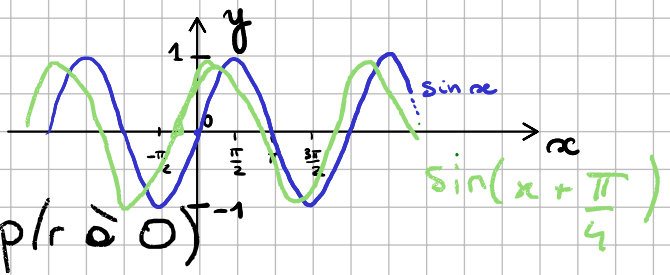


- périodicité $= |\sin(x)| = f(x)$ → paire

Ou $\frac{2\pi}{2} = \pi$

La fonction $y = |\sin x|$ est paire, périodique de période π

h) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



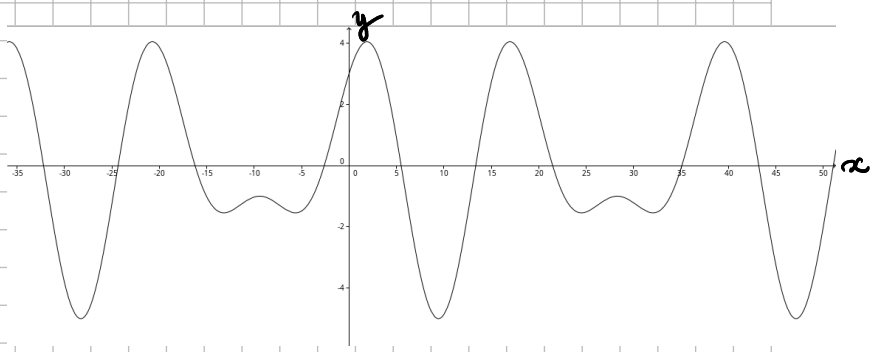
- parité /

(pas de symétrie p/r à O)

- périodicité 2π

La fonction $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est ni paire ni impaire, périodique de période 2π

m) $y = 3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

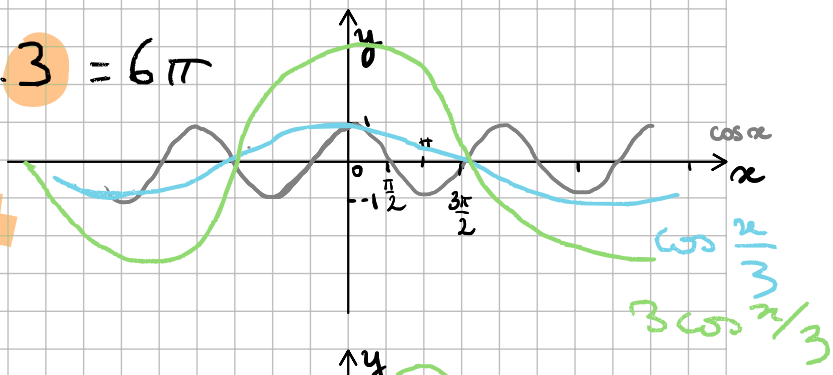


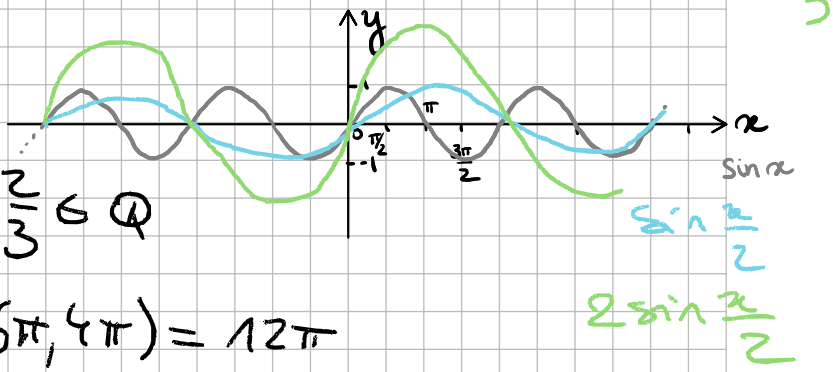
- parité ✗

- périodicité

$f : 3\cos\frac{x}{3}$ → période $2\pi \cdot 3 = 6\pi$

$g : 2\sin\frac{x}{2}$ → période $2\pi \cdot 2 = 4\pi$





→ f+g est périodique

si $\frac{6\pi}{4\pi} \in \mathbb{Q}$. Or $\frac{6\pi}{4\pi} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

→ la période est le ppcm $(6\pi, 4\pi) = 12\pi$

⇒ La fonction $y = 3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est ni paire ni impaire périodique de période 12π

