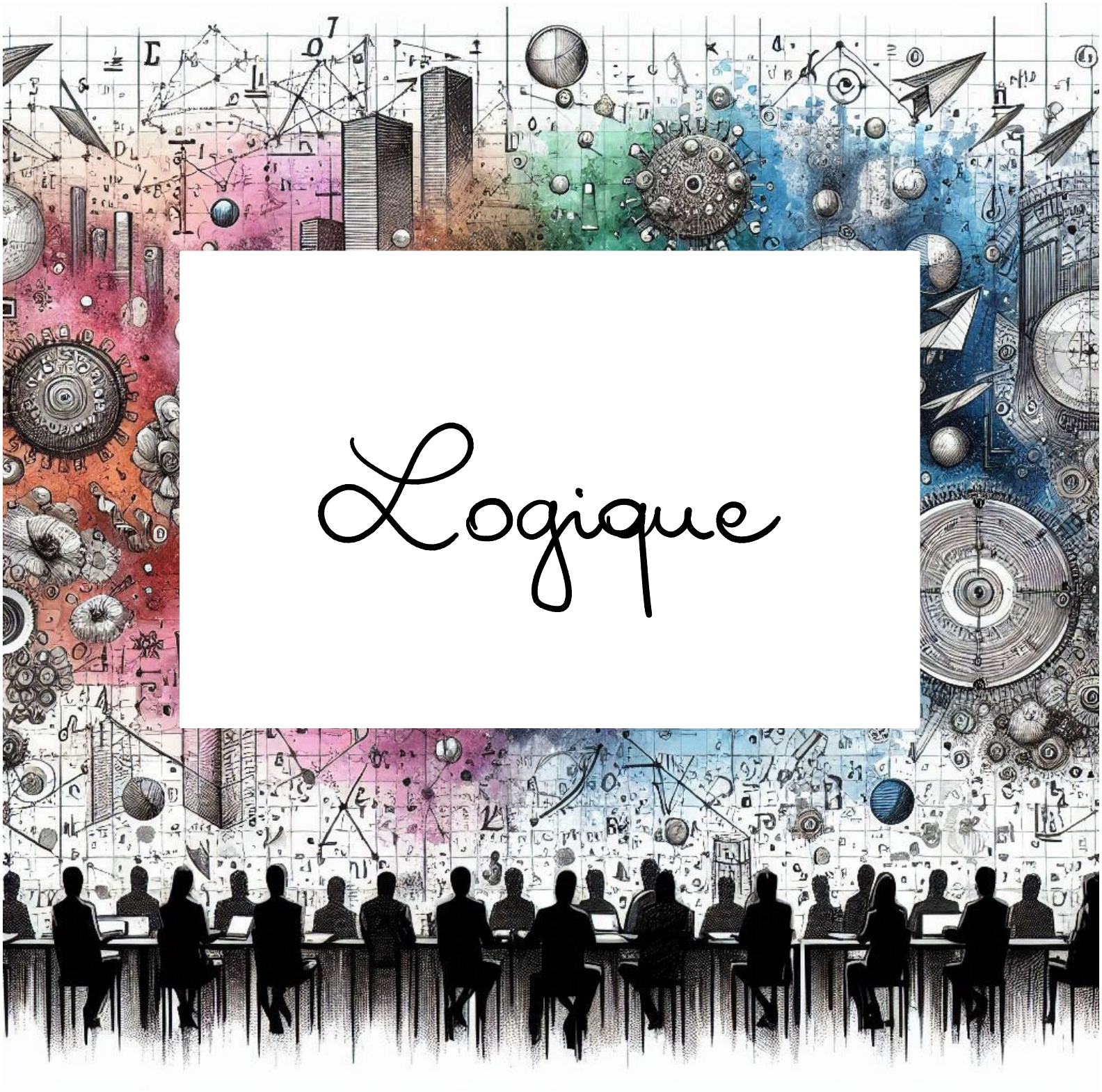
1er



Logique

implicat° → $A \to B$ est faux uniquement si $\begin{cases} A \text{ est vraie} \\ B \text{ est fausse} \end{cases}$

ou $\vee$ $A \vee B$ est faux uniquement si $\begin{cases} A \text{ est faux} \\ B \text{ est faux} \end{cases}$

et $\wedge$ $A \wedge B$ est vrai uniquement si $\begin{cases} A \text{ vrai} \\ B \text{ vrai} \end{cases}$

"non" $\neg$ $\neg A$ est vrai si et seulement si A faux

$\forall$ pour tout / pour tous , on a

$\exists (!)$ il existe (un seul) : ou | tel que

$\in$ appartient à

$\subseteq$ est inclus dans

$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg (\forall x \in B, A) \leftrightarrow \exists x \in B, \neg A$

$\neg (\exists x \in B, A) \leftrightarrow \forall x \in B, \neg A$

1.1. Traduisez chacune des affirmations suivantes par une formule logique en utilisant les lettres indiqués et les symboles → (« implique »), ∨ (« ou »), ∧ (« et ») et, si nécessaire, le symbole ¬ (« non »).

c. S'il pleut ou neige, le match sera annulé. (P,N,A)

$P \vee N \rightarrow A$

d. Pour que deux vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul. (O,N)

$(O \rightarrow N) \wedge (O \leftarrow N)$

(on écrit aussi $O \leftrightarrow N$)

1.3. Déterminez lesquelles des argumentations suivantes sont correctes.

b. Si le prix de l'essence augmente, le coût de la vie augmente. Lorsque le coût de la vie augmente, la popularité du gouvernement baisse. Donc, si l'essence devient plus chère, le gouvernement perd en popularité.

L'énoncé dit : $[(E\nearrow \rightarrow V\nearrow) \text{ et } (V\nearrow \rightarrow P\searrow)] \rightarrow [E\nearrow \rightarrow P\searrow]$

L'argumentation est logiquement correcte par transitivité de l'implication

c. Une augmentation du prix du pain ou du thé est prévue. Comme le pain coûte plus cher, le prix du thé est inchangé.

L'énoncé dit $[(P\nearrow \vee T\nearrow) \text{ et } P\nearrow] \rightarrow \neg(T\nearrow)$

L'argumentation est logiquement fausse car le "ou" logique (∨) n'est pas exclusif

f. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas divisible par 4, il n'est pas pair.

L'énoncé dit $[(D4 \rightarrow P) \text{ et } \neg D4] \rightarrow \neg P$

L'argumentation est logiquement fausse car dans une implication, la fausseté de la prémisse ne dit rien de la conséquence

NB: le seul lien entre négation et implication est la contraposée : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

1.9. En utilisant les abréviations
$\mathbb{N}$ pour l'ensemble des nombres naturels,
$P(x)$ pour « x est pair »,
$I(x)$ pour « x est premier »,
traduisez en formules logiques les assertions suivantes :

TP
a. Il existe un nombre naturel pair ;
b. Il existe un nombre naturel pair et premier ;
c. Il est faux que tout nombre naturel pair est premier,
d. Il existe un seul nombre naturel à la fois pair et premier.

c) $\neg \left(\forall x \in \mathbb{N}, \; P(x) \rightarrow I(x) \right)$

d) $\exists ! \, x \in \mathbb{N} : \; P(x) \vee I(x)$

1.17. La négation de $\forall \epsilon > 0, \; \exists N, \; \forall n \geq N \; : \; |f(n)| < \epsilon$ est

- $\forall \epsilon > 0, \; \nexists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$
- $\exists \epsilon > 0$, tel que $\forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\exists N$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$

$\neg \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \varepsilon \right)$

$\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \neg \left(\exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \varepsilon \right)$

$\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N, \neg \left(\forall n \geq N : |f(n)| < \varepsilon \right)$

$\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N : \neg \left(|f(n)| < \varepsilon \right)$

$\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geqslant \varepsilon$

$\rightarrow$ 2ème proposition est la seule correcte

1.19. Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

- Si tu triches, j'abandonne le jeu.
- Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.
- Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.
- Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.
- Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

- $T \to A$
- $T \wedge \neg A$ est vraie quand $\begin{cases} T \text{ vraie} \\ A \text{ fausse} \end{cases}$, à l'opposé des autres
- $T \to A$ ("joue pas honnêtement" = "tricher")
- $\neg T \vee A$
- $\neg A \to \neg T$ contraposée de $T \to A$

$\neg T \vee A$ est fausse seulement si $\begin{cases} T \text{ est vraie} \\ A \text{ est fausse} \end{cases}$

comme l'implication $T \to A$.


Racines

2.2 Ci-dessous, on suppose $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
Simplifier

b. $\dfrac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$

Décomposition en facteurs premiers :

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\rightarrow 64 = 2^6$ $\quad 162 = 2 \cdot 3^4$

$$\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}} = \frac{\sqrt[4]{2^6 a^6}}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^4 a}} = \frac{\sqrt[4]{2^2 a^2 \cdot 2^4 a^4}}{\sqrt[4]{2a}\,3} = \frac{2a}{3}\sqrt[4]{\frac{2^2 a^2}{2a}}$$

$$= \frac{2a}{3}\sqrt[4]{2a}$$



Coefficients binomiaux & binôme de Newton

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (-y)^k$$

2.8. Développer $(1-1)^n$ et en déduire une propriété des coefficients binomiaux.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k \text{ pairs}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ impairs}} \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \text{ pairs}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impairs}}^{n} \binom{n}{k}$$

la somme des coeff binomiaux $\binom{n}{k}$, k pairs est égale à la somme des $\binom{n}{k}$, k impairs

Exemple : $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = \underline{8}$

$\binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = \underline{8}$


Récurrence

21. Démontrez par récurrence (pour n un nombre naturel) :

~~a. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$~~

b. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Remarquons qu'ici n représente un naturel non-nul.

Montrons par récurrence que $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Cas de base Vérifions que la propriété est vraie pour $n=1$:

$1^3 = 1$; $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$

OK

Hypothèse de récurrence

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain naturel N,

C-à-d : $1^3+2^3+\ldots+N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$

Récurrence / Hérédité

Montrons que la propriété est vraie pour $N+1$

C-à-d $1^3+2^3+\ldots+(N+1)^3 = \frac{(N+1)^2(N+1+1)^2}{4}$

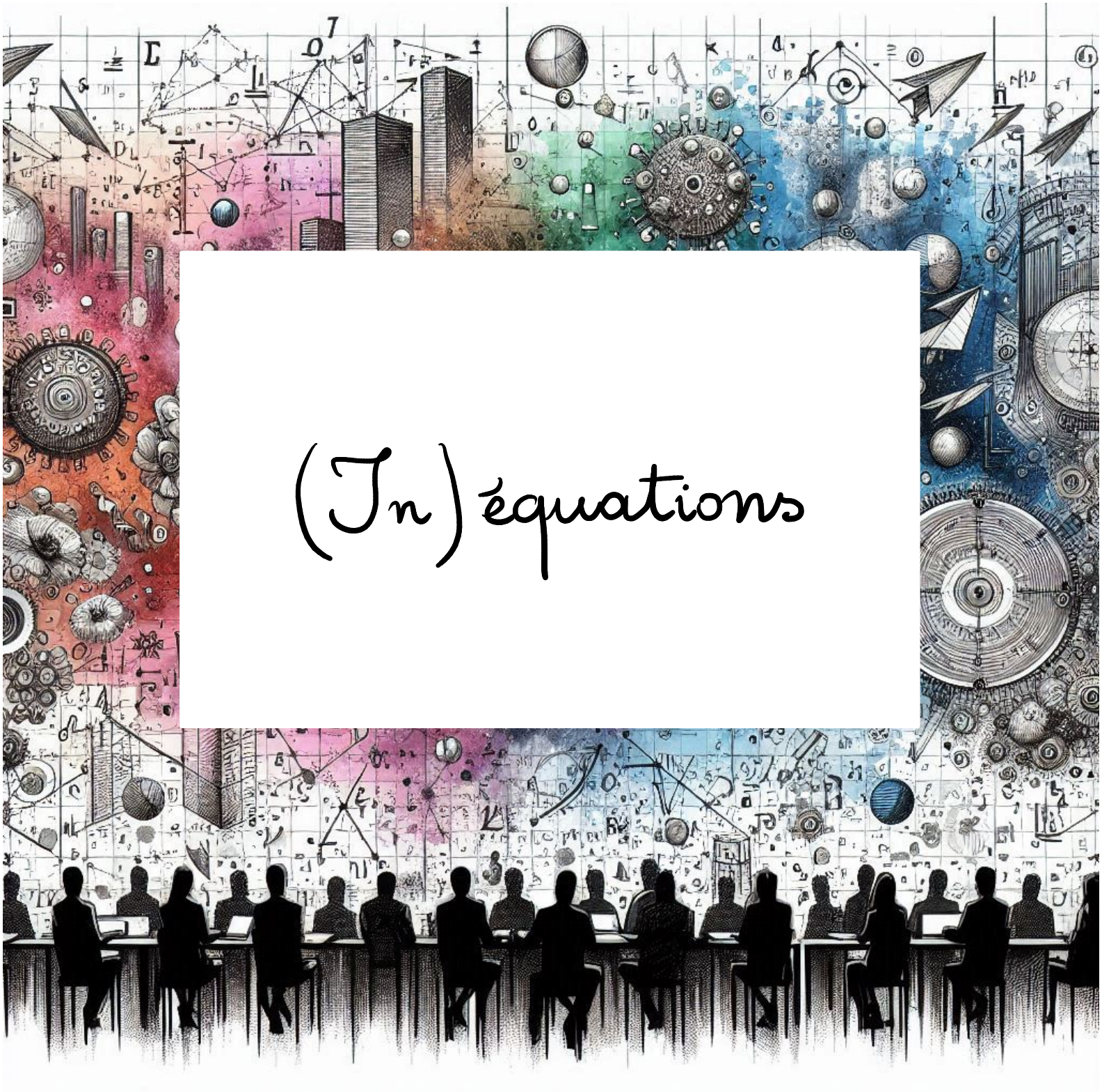
Preuve : $1^3+2^3+\ldots+N^3+(N+1)^3$

$= \frac{N^2(N+1)^2}{4} + (N+1)^3$ par l'hypothèse de récurrence

$= (N+1)^2\left(\frac{N^2}{4} + (N+1)\right)$

$= (N+1)^2 \cdot \left(\frac{N^2+4N+4}{4}\right) = \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{4}$

CQFD !


(In)équations

Equation : $-4x + \frac{3}{2} = 12$

$-4x + \frac{3}{2} - 12 = 0$

Inéquation : $> \geq < \leq$

$-4y + \frac{3}{2} > 12$

Condition d'existence : CE

- fraction → Dénominateur non-nul
- racines "carrée" : radicande positif

Solut° : S



$S = \{a, b, c\}$



$S =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$

2.11. Trouver les valeurs réelles x telles que

c. $\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$

e. $x^3 - 5x^2 = -6x$

g. $\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| \geqslant 3$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{5x+2} \geqslant 3$ ou $\frac{x-1}{5x+2} \leqslant -3$

c) CE: $x+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2$

$\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$

$(x^2-3x)\frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2-3x=0$ ($\frac{1}{x+2} \neq 0$)

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$

produit nul

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x-3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$

$S = \{0,3\}$

e) CE:

$x^3 - 5x^2 = -6x$

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2-5x+6) = 0$

$x=0$ ou $x^2-5x+6=0$ ($a=1$, $b=-5$, $c=6$)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=0$ ou $(x-2)(x-3)=0$

$x=0$ ou $x=2$ ou $x=3$ $\rightarrow S = \{0,2,3\}$

$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{25-4.1.6}}{2.1.}$

g) CE:

$\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| = 3$

CE : $5x+2 \neq 0$

$5x \neq -2$

$x \neq -2/5$

$\frac{x-1}{5x+2} = 3$ ou $\frac{x-1}{5x+2} = -3$

$(5x+2)\left(\frac{x-1}{5x+2}\right) = 3(5x+2)$ ou ...

$x-1 = 15x+6$ ou ...

$\frac{-1-6}{-7} = 14x \Leftrightarrow \frac{-7}{14} = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = x$

ou ...

ou ... ou $x = -\frac{5}{16}$

$S = \{-\frac{1}{2}, -\frac{5}{16}\}$

2.12 Trouver les valeurs réelles x telles que

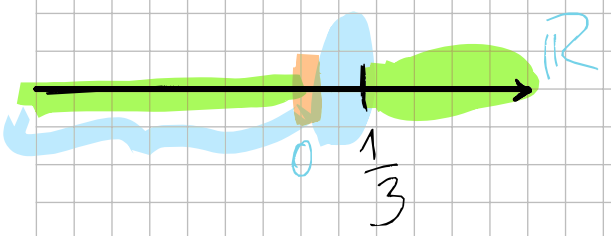
$2 < 3 \iff -3 < -2$

a. $\frac{1}{x} < 3$

c. $\frac{x^2 - 3x}{x+2} > 0$

g. $\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| > 3$

a) CE : $x \neq 0$



$\frac{1}{x} < 3 \iff 1 < 3x$ $(\text{si } x > 0)$ ou $1 > 3x$ $(\text{si } x < 0)$

si $x > 0$: $\iff \frac{1}{3} < x$ ou $\frac{1}{3} > x$ si $x < 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

c) CE : $x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

$\frac{x^2-3x}{x+2} > 0 \iff \frac{x(x-3)}{x+2} > 0$

tableau de signes

	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-3)}{x+2}$	$-$	$-$	$\nexists$ (C.E.)	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$S =]-2, 0[\cup]3, +\infty[$

g) CE : $x \neq -\frac{2}{5}$

$$\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| > 3$$

	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$5x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{5x+2}$	$+$	$+$	///	$-$	0	$+$	$+$

- si $x < -\frac{2}{5}$; $\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| > 3 \iff \frac{x-1}{5x+2} > 3$

$\iff x-1 < 3(5x+2)$ $\quad (5x+2<0)$

$\iff -7 < 14x$

$\iff -\frac{1}{2} < x$

- si $-\frac{2}{5} < x < 1$; $\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| > 3 \iff -\frac{x-1}{5x+2} > 3$

$\iff -x+1 > 3(5x+2)$

$\iff -5 > 16x \iff x < -\frac{5}{16}$

- si $x \geq 1$ $\left|\frac{x-1}{5x+2}\right| > 3 \iff x-1 > 3(5x+2)$

$\iff -7 > 14x \iff x > -\frac{1}{2}$

incompatible !

Donc l'ensemble de solution est

$$S = \left(\left]-\infty, -\tfrac{2}{5}\right[\cap \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\right) \cup \left(\left]-\tfrac{2}{5}, 1\right[\cap \left]-\infty, -\tfrac{5}{16}\right[\right)$$

$$= \left]-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{5}\right[\cup \left]-\tfrac{2}{5}, -\tfrac{5}{16}\right[$$

$$= \left]-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{16}\right[\setminus \left\{-\tfrac{2}{5}\right\}$$

