



Dérivées



FONCTIONS USUELLES

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x$$

OPÉRATIONS (f, g: fonctions dérivables, $k \in \mathbb{R}$)

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(kf)' = kf'$$

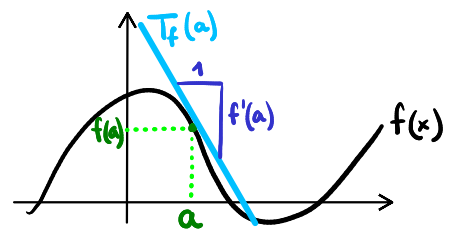
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

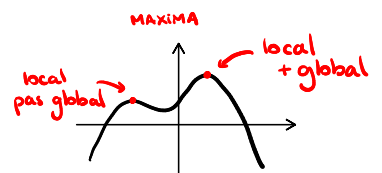
$$(f \circ g)' = (f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

TANGENTE

$$T_f(a) \equiv (y - f(a)) = f'(a)(x - a)$$



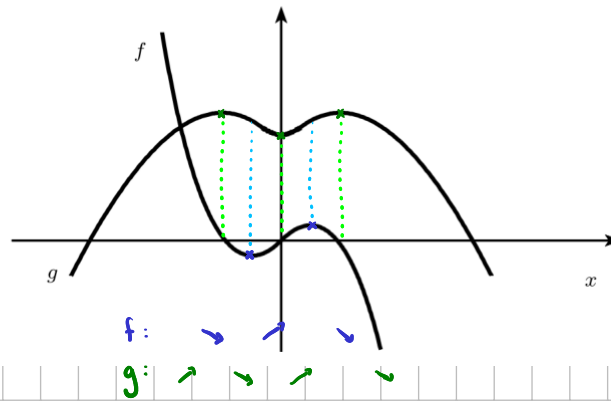
EXTREMA local v.s global



Si f admet un extremum en $x \in \text{int}(\text{Dom} f)$, alors $f'(x) = 0$.

⚠ $f'(x) = 0 \nRightarrow x$ est extremum

5.2. Voici, dans le même système d'axes, les graphes de deux fonctions f et g .
Laquelle de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre ?



* Observons f et discutons de sa dérivée:
La fonction f est décroissante presque partout.
Sa dérivée devrait donc être négative presque partout.
Etant donné que g est positive presque partout, elle ne peut pas représenter $f'(x)$.

* Observons g et discutons de sa dérivée:
Les variations de croissance de g correspondent aux variations de signe de f ,
tout comme les minima et maxima locaux de g correspondent aux zéros de f .
La fonction f est donc un bon candidat pour g' .

5.8. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où a, b et c sont des constantes) :

i. $y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

c. $y = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$

$$\begin{aligned} \text{c. } & \left[(2x+1)(3x+2)(3x+2)^{1/3} \right]' \\ &= \left[\underbrace{(2x+1)}_f \underbrace{(3x+2)^{4/3}}_g \right]' \\ &= \underbrace{(2x+1)'}_f \underbrace{(3x+2)^{4/3}}_g + \underbrace{(2x+1)}_f \underbrace{\left((3x+2)^{4/3} \right)'}_g \\ &= 2(3x+2)^{4/3} + (2x+1) \left(\frac{4}{3} (3x+2)^{4/3-1} \cdot (3x+2)' \right) \\ &= 2(3x+2)^{4/3} + (2x+1) \left(\frac{4}{3} (3x+2)^{1/3} \cdot 3 \right) \\ &= (3x+2)^{1/3} \left[2(3x+2) + 4(2x+1) \right] \\ &= \sqrt[3]{3x+2} (14x+8) = 2(7x+4)\sqrt[3]{3x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i. } & \left[\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \right]' = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4} \right]' \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)' \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{-3/4} \cdot \left[\frac{(x-1)'(x+2) - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{-3/4} \cdot \left[\frac{1(x+2) - (x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{3/4} \cdot \frac{3}{(x+2)^2} \quad \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \\ &= \frac{1}{(x-1)^{3/4} \cdot (x+2)^{5/4}} \\ &= \left(\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5} \right)^{-1} \end{aligned}$$

5.25. Calculer les dérivées premières des fonctions $x \mapsto y$ suivantes :

i. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$;

d. $y = 2^{\sqrt{x}}$;

d. $(e^x)' =$ $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow (a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2^{\sqrt{x}})' &= 2^{\sqrt{x}} \ln 2 (\sqrt{x})' \\ &= 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2^{\sqrt{x}-1} \ln 2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5.13. Déterminer les points où les tangentes à la courbe d'équation $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ dans $\mathbb{R}^2$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

* tangentes à la courbe $\rightarrow$ dériver y

$$[3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20]' = \underbrace{12x^3 + 12x^2 - 24x}_{\text{pente de la tangente au point } x.}$$

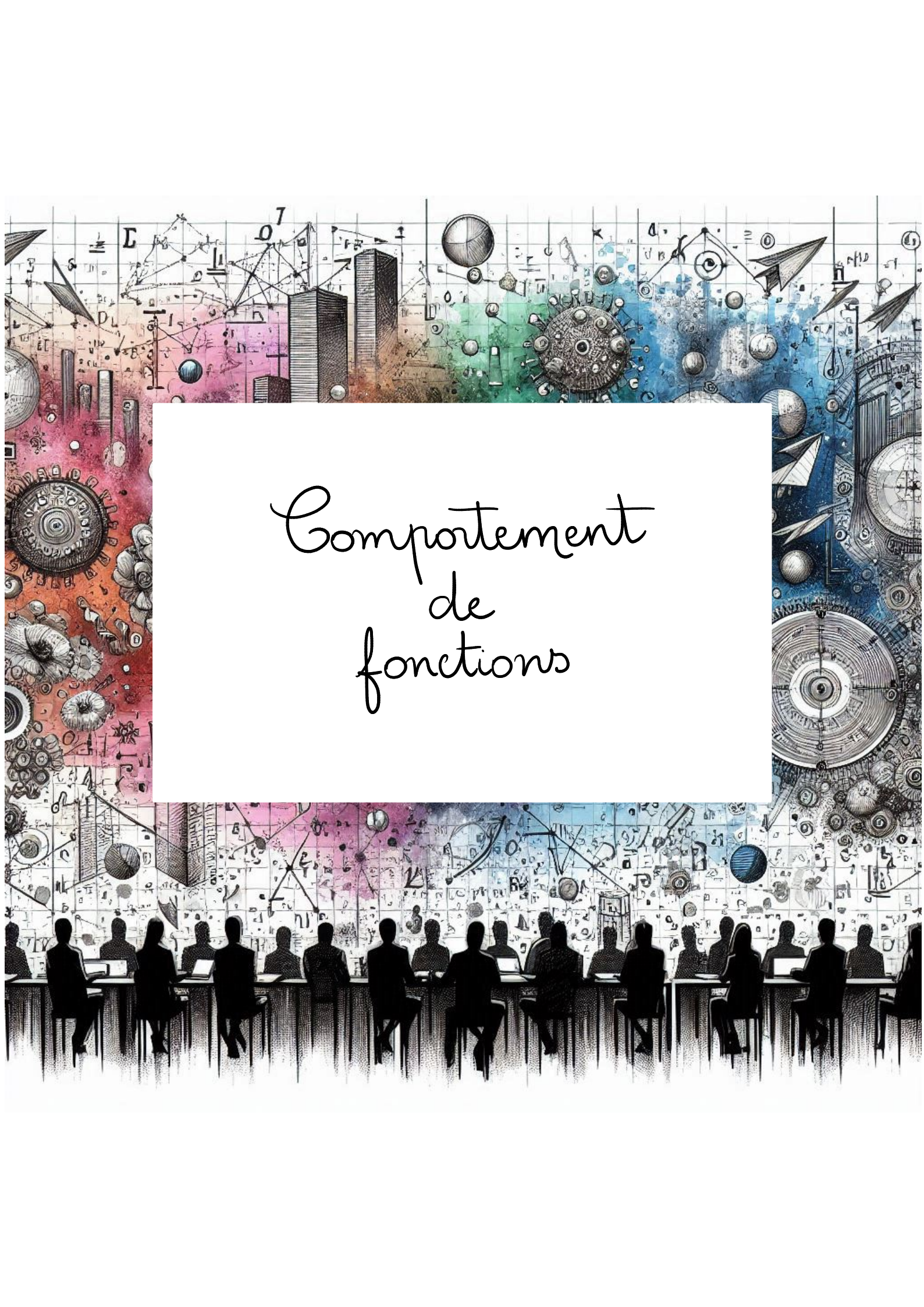
* parallèle à l'axe des abscisses $\rightarrow$ pente = 0.

$$12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x(x-1)(x+2) = 0$$

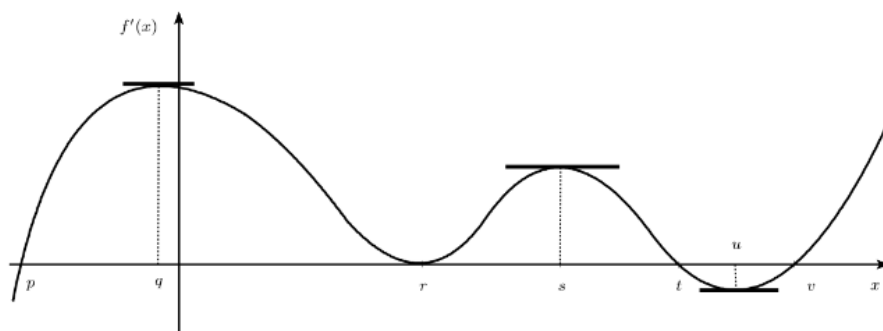
$$\Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 1\}$$

Les tangentes à la courbe donnée sont parallèles à Ox lorsque $x \in \{-2, 0, 1\}$.



Comportement de fonctions

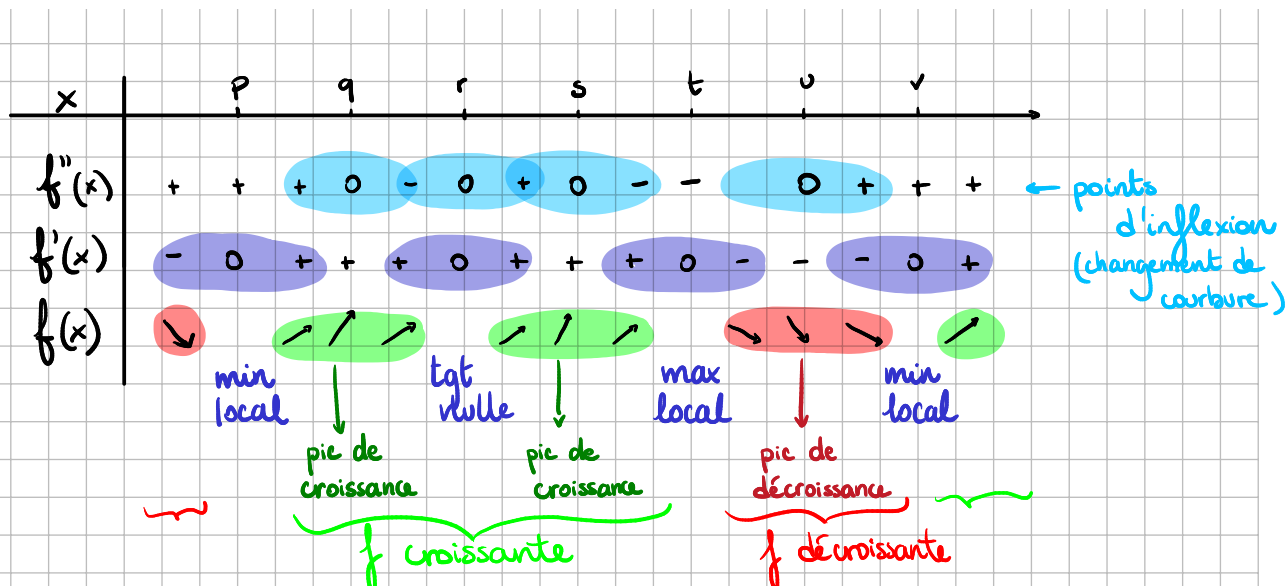
5.34 Si le graphe ci-dessous est celui de la fonction dérivée f' , pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction $x \mapsto f(x)$ admet-elle



- un minimum local ?
- un maximum local ?
- un point d'inflexion à tangente horizontale ?
- un point d'inflexion ?

Sur quel sous-ensemble de l'intervalle $[a, h]$ la fonction f est-elle

- croissante ?
- décroissante ?



- La fonction admet un **minimum local** en $x=p$ et $x=v$.
- La fonction admet un **maximum local** en $x=t$.
- La fonction admet un **point d'inflexion** dont la tangente est nulle en $x=r$.
- La fonction admet un **point d'inflexion** en $x \in \{q, r, s, u\}$.
- La fonction est croissante sur **$[p, t] \cup [v, +\infty[$**
- La fonction est décroissante sur **$] -\infty, p] \cup [t, v]$**

5.45. Déterminer n pour que la fonction

$$y = (x - 6)^n e^x$$

admette un extrémum en $x = 4$. Quelle est la nature de cet extrémum ?

Si la fonction admet un extrémum en $x=4$ alors sa dérivée vaut 0 en ce point.

$$y' = n(x-6)^{n-1} \cdot e^x + (x-6)^n e^x \Leftrightarrow y' = e^x (x-6)^{n-1} (n + x - 6)$$

$$\text{Donc } y'=0 \text{ en } x=4 \Leftrightarrow e^4 (4-6)^{n-1} (n+4-6) = 0 \Leftrightarrow e^4 (-2)^{n-1} (n-2) = 0 \Leftrightarrow n=2.$$

$$\text{Alors } f(x) = e^x (x-6)^2$$

$$\text{et } f'(x) = e^x (x-6)(x-4)$$

x	4		6	
$x-6$	-	-	0	+
$x-4$	-	0	+	+
y'	+	0	-	0
y	$\nearrow$ max local $\searrow$		$\nearrow$	

Pour que la fonction donnée admette un extrémum en $x=4$, il faut que $n=4$. Dans ce cas, cet extrémum est maximum local.

5.54. Faire le graphe des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

1) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$; $\longrightarrow$
 • s'annule en -1
 • n'existe pas en 0

$x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Dérivée première :

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x^2} \right)' = \frac{((x+1)^3)' x^2 - (x+1)^3 (x^2)'}{x^4} = \frac{x^2 \cdot 3(x+1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+1)^2 (3x - 2(x+1))}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{(x+1)^2 (x-2)}{x^3}$$

• s'annule en -1 et 2
 • n'existe pas en 0

$\hookrightarrow$ tableau de signes:

x	-1	0	2	
$(x+1)^2$	+	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0
x^3	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

min local

• Dérivée seconde :

$$\left(\frac{(x+1)^2 (x-2)}{x^3} \right)' = \left(\frac{(x^2+2x+1)(x-2)}{x^3} \right)' = \left(\frac{x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2}{x^3} \right)' = \left(\frac{x^3-3x-2}{x^3} \right)'$$

$$= \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)' = 0 - 3(x^{-2})' - 2(x^{-3})' = +6x^{-3} + 6x^{-4} = +6 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)$$

$$= \frac{6(x+1)}{x^4} \rightarrow \text{tableau de signes:}$$

$\longrightarrow$
 • s'annule en -1
 • n'existe pas en 0

x	-1	0	
$6(x+1)$	-	0	+
x^4	+	+	0
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

• Tableau récapitulatif et graphique

	-1	0	2	
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0
$f''(x)$	$\cap$	0	$\cup$	$\cup$
$f(x)$	$\nearrow$	P.I.	$\searrow$	$\nearrow$

min local $\frac{1}{2}$

