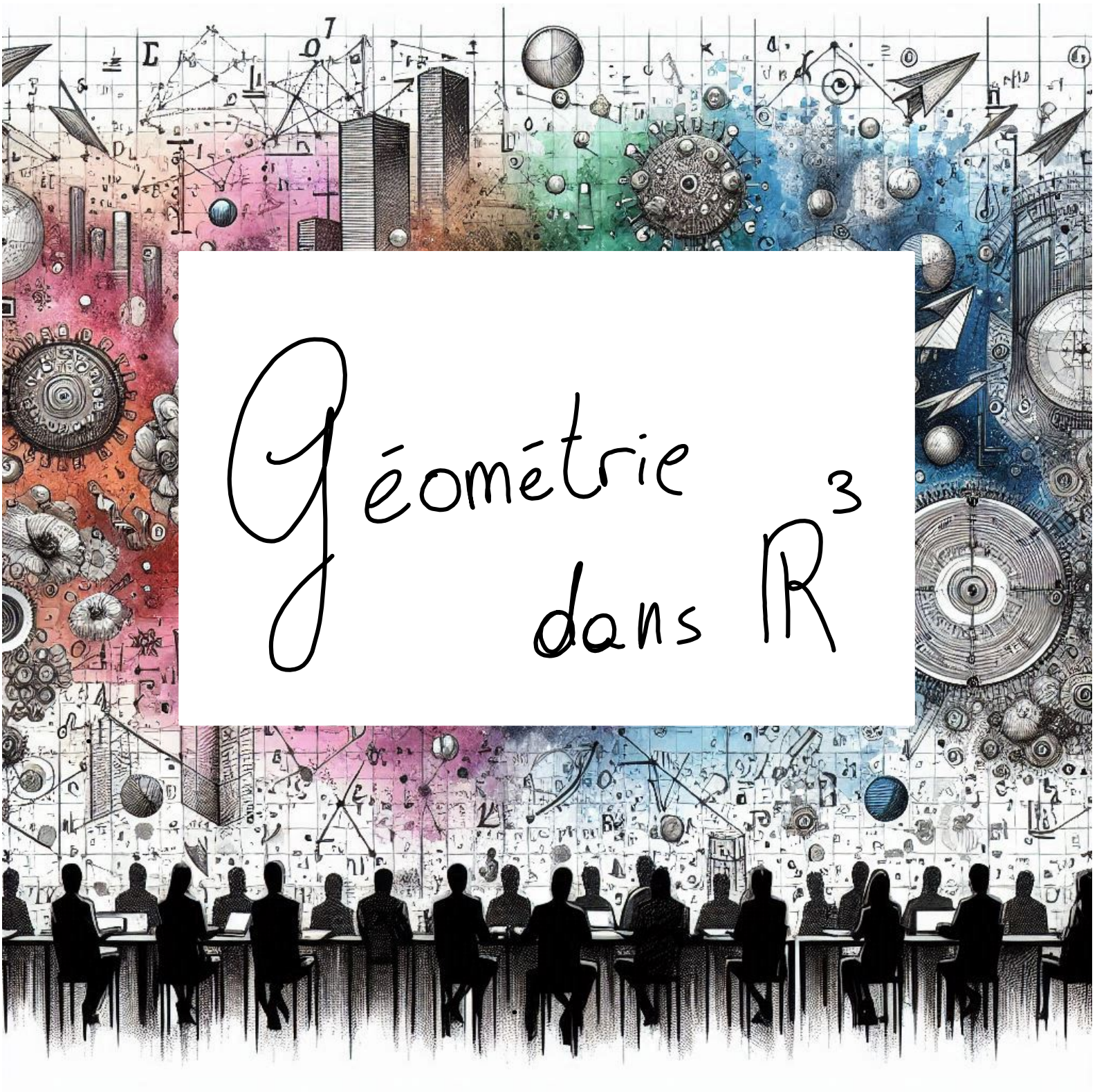

Géométrie
dans $\mathbb{R}^3$

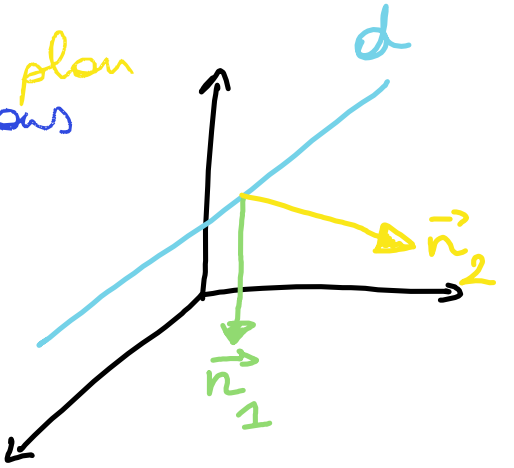
Rappels

* Si $d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$

c'est un plan

↳ c'est un plan

d est l'intersection de deux plans



Et, de même que pour un plan on a

$\vec{n}_\pi = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$,

pour une droite on a

$\vec{v}_d = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a,b,c) \times (a',b',c')$

* $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

(perpendiculaire rime avec scalaire)

* $\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

(vectoriel rime avec parallèle)

* $\measuredangle(d, \pi) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{v}_d, \vec{n}_\pi)$

$\frac{\pi}{2}$: tient compte du fait que la droite est définie par sa direction et le plan par sa normale (= perpendiculaire)

$\measuredangle(\vec{v}_d, \vec{n}_\pi)$: quantité facile à trouver grâce aux deux formules du produit scalaire

3.38. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par la droite d'équations

π

$$d_1 \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$d_2 \equiv \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$d_1 \subseteq \pi$ $\quad \vec{V}_{d_1} = (1,1,-1) \times (2,-1,1)$

$= \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

$= (0,-3,3)$

$\pi \parallel d_2$ $\quad \vec{V}_{d_2} = (5,2,-1) \times (1,1,0) = (1,-1,3)$

$\vec{n}_\pi = \vec{V}_{d_1} \times \vec{V}_{d_2} = (-12,-3,3) \sim (-4,-1,1)$

$d_1 \subseteq \pi$ Cherchons $p \in d_1$: $p = (x,y,0) \in d_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 0 - 1 = 0 \\ 2x - y + 0 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ (2 - 2y) - y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 5/3 \end{cases}$$

$\pi \equiv -4\left(x + \frac{2}{3}\right) - 1\left(y - \frac{5}{3}\right) + 1(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow \pi \equiv -4x - y + z - 1 = 0$

Détails pour les produits vectoriels de la page précédente

- $\vec{V}_{d_1} = (1,1,-1) \times (2,-1,1)$

$$= \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

proposition d'une élève : pour le y, on fait le produit en croix dans l'autre sens (ce qui a été dit au cours reste valide !)

$$= \left(\begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1 \cdot 1 - (-1)(-1), (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)$$

$$= (0, -3, -3)$$

- $\vec{V}_{d_2} = (5,2,1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 5, 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2)$$

$$= (-1, 1, 3)$$

Détails de calculs du produit vectoriel (suite)

- $\vec{n}_{\pi} = \vec{v}_{d_1} \times \vec{v}_{d_2} = (0,-3,3) \times (1,-1,3)$

$$= \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(-3.3 - (-1).3 \; , \; 3.1 - 3.0 \; , \; 0.(-1) - 1.(-3) \right)$$

$$= -12 \; , \; 3 \; ,$$

3.40. Pour quelle valeur de λ la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$d \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $6x - y + 3z - 5 = 0$?

π

$d \parallel \pi \iff \vec{v_d} \perp \vec{n_\pi}$

$\vec{v_d} = (2, 3, \lambda)$

$\vec{n_\pi} = (6, -1, 3)$

$\langle \vec{v_d}, \vec{n_\pi} \rangle = 6 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + \lambda \cdot 3 = 0$

$\iff 9 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = -3$

d est parallèle à π ssi $\lambda = -3$.

3.49. Trouver la (ou les) valeur(s) de k pour que le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + ky - 2z - 9 = 0$

e. fasse un angle de mesure $\pi/3$ avec le plan $2x - 2y + z = 0$;

π_1 : $x + ky - 2z - 9 = 0$

π_2 : $2x - 2y + z = 0$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
cos	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$

$$\measuredangle(\pi_1, \pi_2) = \measuredangle(\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (1, k, -2) \to \|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2} = \sqrt{k^2 + 5}$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (2, -2, 1) \to \|\vec{n}_{\pi_2}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$\langle \vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2} \rangle = 1 \cdot 2 + k \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -2k$$

$$\|\vec{n}_{\pi_1}\| \cdot \|\vec{n}_{\pi_2}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{k^2+5} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-2k = \sqrt{k^2+5} \cdot \frac{3}{2}$$

en carré

$$\Rightarrow 4k^2 = (k^2+5)\frac{9}{4} \iff 16k^2 - 9k^2 = 45 \iff k^2 = \frac{45}{7}$$

$$\iff k = \pm\sqrt{\frac{45}{7}}$$

La valeur de k cherchée est $k = -\sqrt{\frac{45}{7}} = -3\sqrt{\frac{5}{7}}$

3.50. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne les droites D_1 et D_2 d'équations

$$D_1 \equiv x-3 = -y-2 = \frac{z}{2}, \qquad D_2 \equiv x+2 = y-3 = \frac{z+5}{2}$$

et les plan α et β d'équations

$$\alpha \equiv 2x-2y+z-3=0, \quad \beta \equiv 3x-y+2z-1=0$$

On demande de calculer l'angle entre ~~a) D_1 et D_2~~ ; b) D_1 et α ; ~~c) D_1 et β~~ ; ~~d) D_2 et α~~ ; e) ~~D_2 et β~~ ; ~~f) α et β~~

$$\measuredangle(D_1,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{v}_{d_1}, \vec{n}_\alpha)$$

$$\vec{v}_{d_1} = (1,-1,2) \qquad \vec{n}_\alpha = (2,-2,1)$$

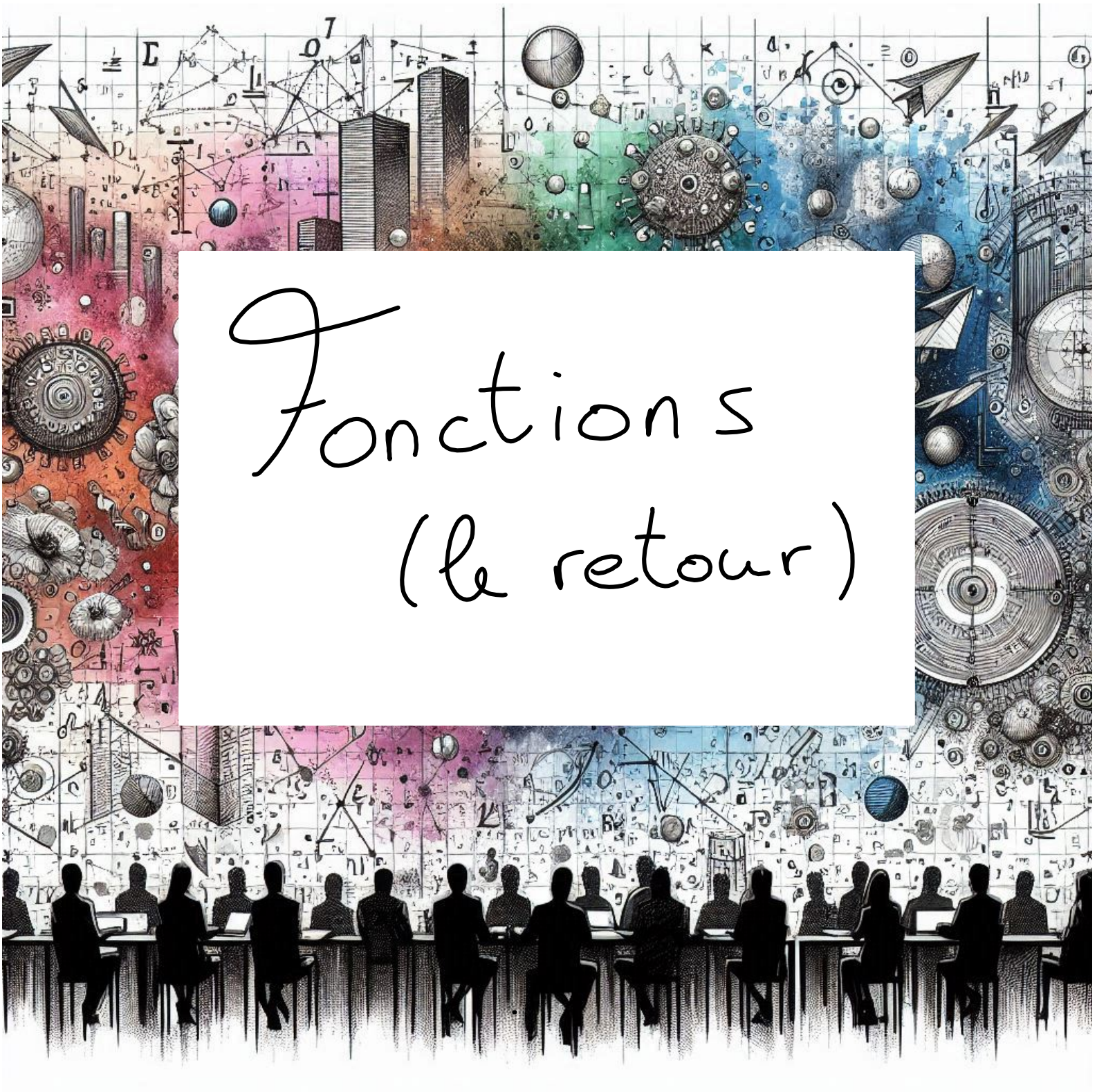
$$\|\vec{v}_{d_1}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6} \qquad \|\vec{n}_\alpha\| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\langle \vec{v}_{d_1}, \vec{n}_\alpha \rangle = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1 = \sqrt{6}\cdot 3 \cdot \cos\underbrace{\measuredangle(\vec{v}_{d_1}, \vec{n}_\alpha)}_{=x}$$

$$\frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{6}{3\sqrt{6}} = \cos(x)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{6} = \cos x \to x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\to \measuredangle(D_1,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

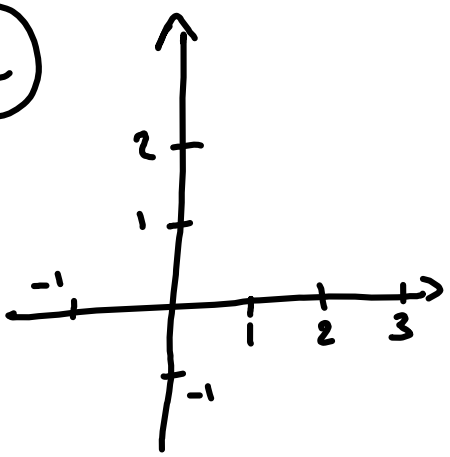

Fonctions
(le retour)

2.19. Soit les fonctions

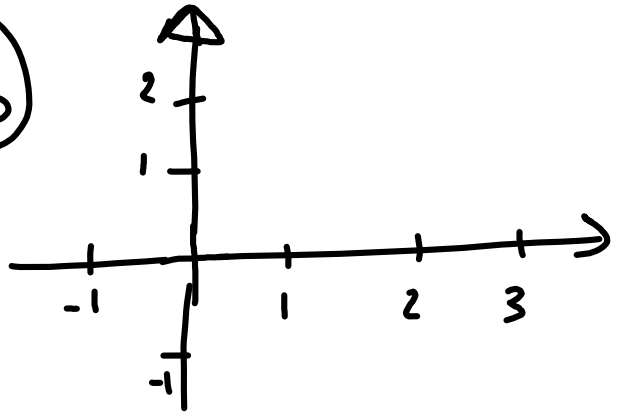
- $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \to \lfloor x \rfloor$; (a)
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : x \to \lfloor x \rfloor$; (b)
- $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to \sqrt{x}$; (c)

Déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.
Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

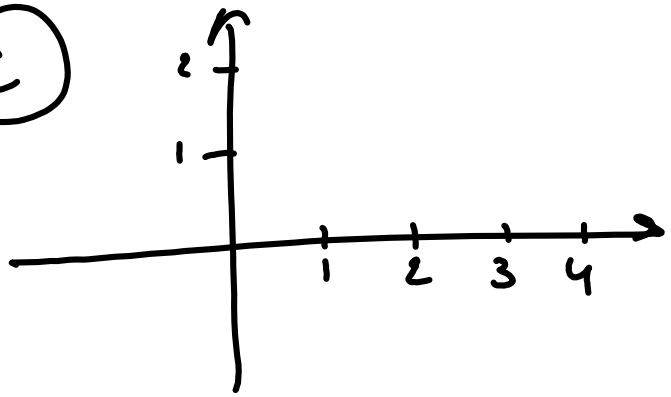
(a)

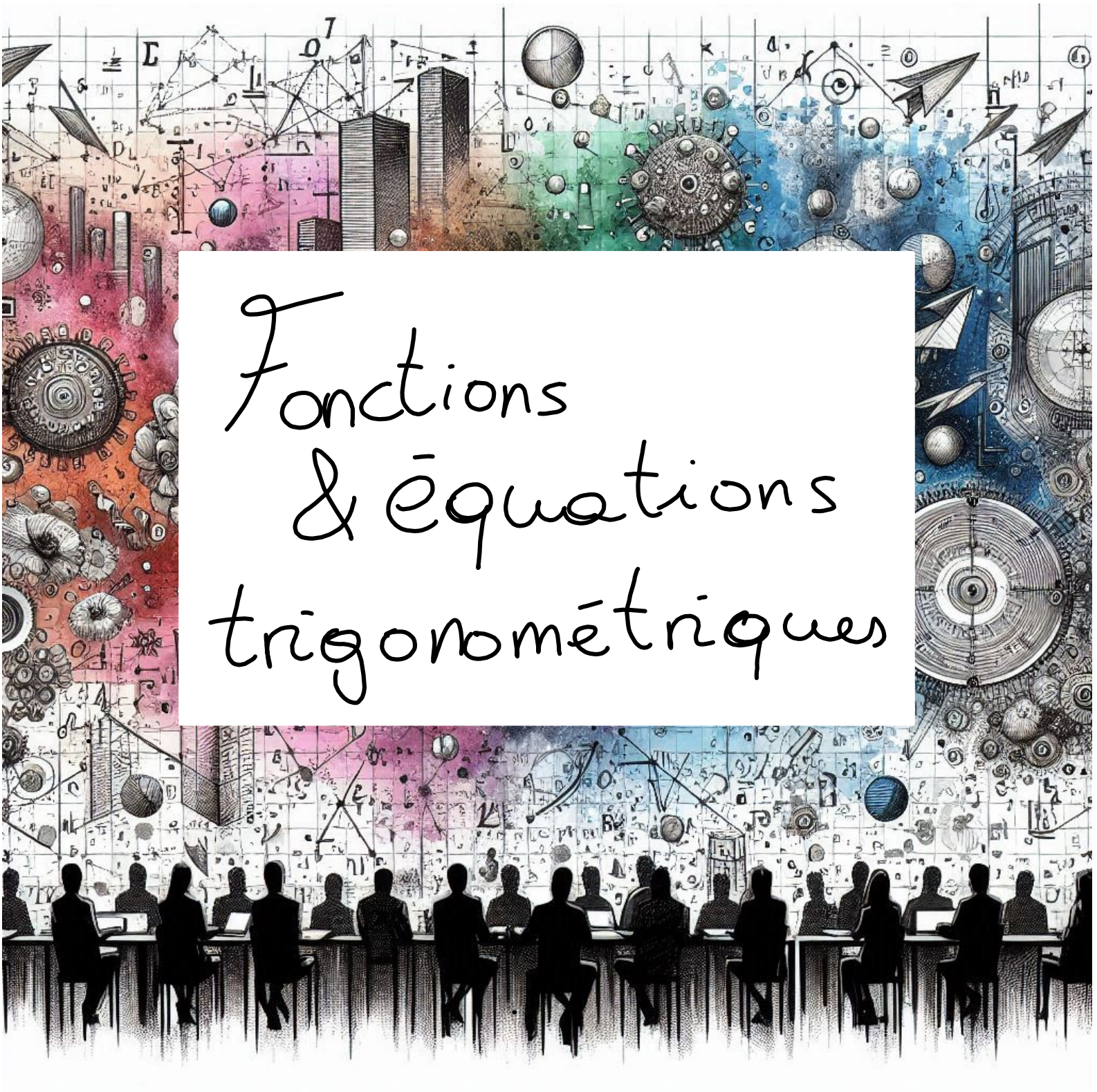


(b)



(c)




Fonctions
& équations
trigonométriques

Rappels

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\text{Sec}(a) = 1/\sin(a)$

$\text{Cosec}(a) = 1/\cos(a)$

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\text{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

7.1. Résoudre les équations suivantes en x :

b) $\sin x - \sin 2x = 0$;

h) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$;

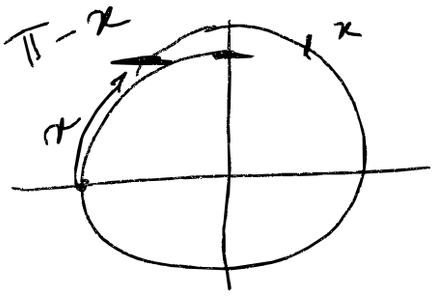
j) $\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos\frac{1}{2}$ ○



b) $\sin x - \sin 2x = 0$



$\Leftrightarrow \sin x = \sin 2x$



$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi$ ou

$x = (\pi - 2x) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -x = 2k\pi$ ou $3x = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = -2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(1+2k)$

$S = \{-2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$

h) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}_{\sin(a+b)} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{3} + x = (\pi - \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - 4\pi}{4 \cdot 3} = -\frac{\pi}{12}\right)$ $\hookrightarrow S = \{x = \ldots, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = \ldots, k \in \mathbb{Z}\}$

7.2. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

g) $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$; j) $\text{séc}(\text{arccotg}\, \sqrt{3})$.

g) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$\Rightarrow \cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}) =$

j) $\text{arc cotg}\, \sqrt{3} =$

7.3. Déterminer la valeur (en fonction de x) de

f) $\operatorname{tg}(\arcsin 5x)$

7.4. Déterminer les domaines de définition des fonctions $x \mapsto y = y(x)$ suivantes :

c) $y = \arctan(\sin 3x)$; g) $y = \arccos(\operatorname{tg} 2x)$;

c) $\mathrm{dom}(\arctan(x)) = \mathbb{R}$

g) $\mathrm{dom}(\arccos x) = [-1, 1]$