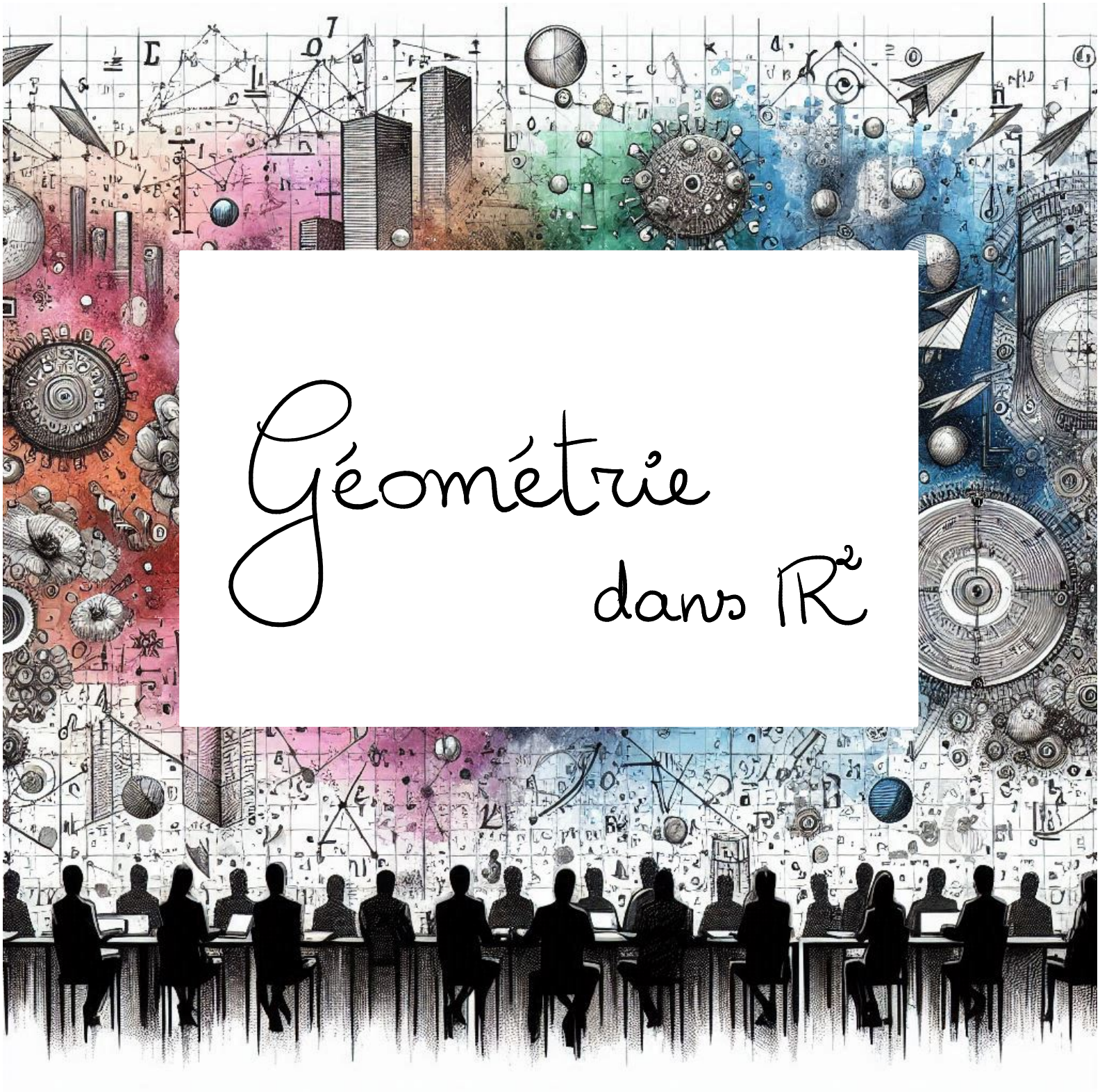
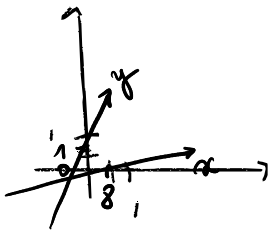
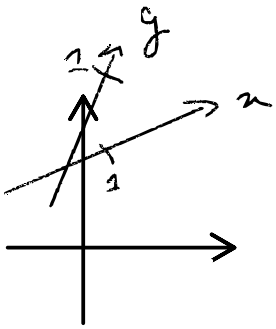

Géométrie
dans $\mathbb{R}^2$

# Repère orthonormé

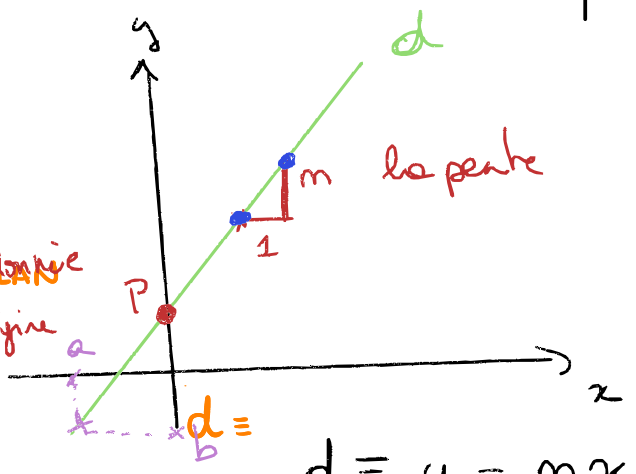
REPÈRE : axes + unités

ORTHONORMÉ : même norme



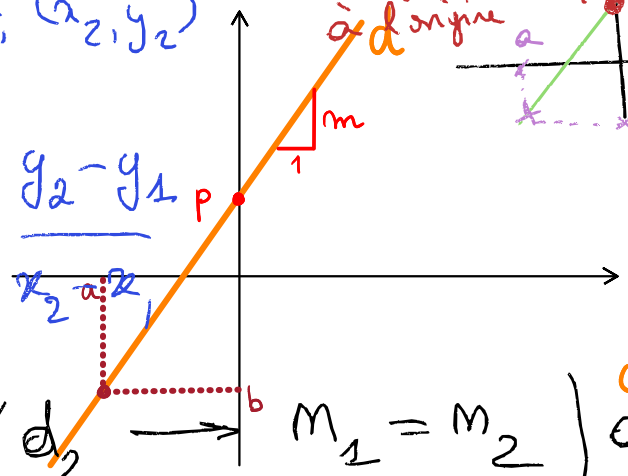


## Dans le plan : les droites




### DROITES DANS LE PLAN

$(x_1, y_1)$ ; $(x_2, y_2)$



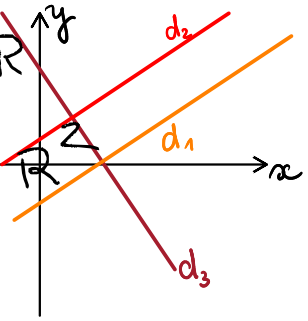

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$d \equiv y = mx + p$$

$$d \equiv y - b = m(x - a)$$

$d_1 \parallel d_2 \rightarrow m_1 = m_2$ | $d_1 \perp d_2 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

$d_1 \parallel d_2$ les cercles : centre : $(a, b)$, rayon $R$




$d_1 \perp d_3 \Rightarrow C \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

## EQUATION D'UN CERCLE

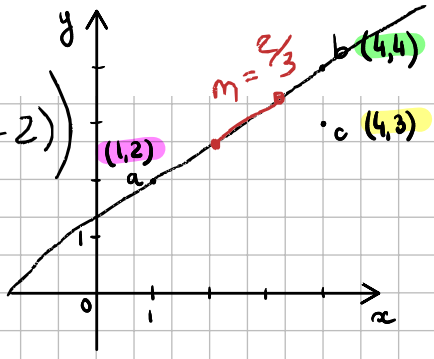
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

**6.1.** On donne les points $a = (1, 2)$, $b = (4, 4)$ et $c = (4, 3)$ du plan. Déterminer

a. les composantes des vecteurs $\vec{ab}$ et $\vec{ba}$ ;

b. les coordonnées du milieu du segment $ab$ ;

c. les coordonnées du centre de gravité du triangle $abc$.




a. $\vec{ab} = (3, 2)$ $\left(= (4-1, 4-2)\right)$

$\vec{ba} = (-3, -2)$

b. $\vec{ax} = \frac{1}{2}\vec{ab} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

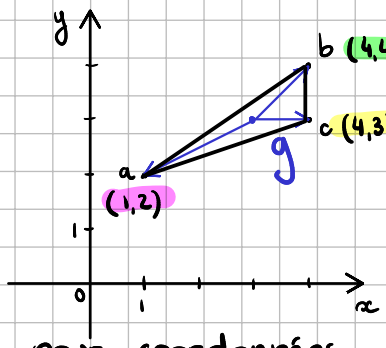
$\vec{ox} = \vec{oa} + \vec{ax} = (1,2) + \left(\frac{3}{2}, 1\right) = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

Coord d'un point = Composantes du vecteur de $(0,0)$ à ce point

Le milieu du segment $[a, b]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

c. $\vec{og} = \frac{1}{3}(\vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc})$

$= \ldots = (3, 3)$




$-\vec{ag} = \vec{bg} + \vec{cg}$

Le centre de gravité du triangle abc a pour coordonnées $(3, 3)$

**6.3.** On donne les points $a = (1, 7)$ et $b = (6, -3)$.

$a = (1,7) \rightarrow \vec{oa} = (1,7)$

a. Déterminer les coordonnées du point $c$ situé sur la droite $ab$ et tel que $\vec{ac} = \frac{2}{3}\vec{cb}$.

les composantes du vecteur $\vec{oc}$

$\vec{ac} = \frac{2}{3}\vec{cb}$

$\Leftrightarrow \vec{oa} + \vec{oc} = \frac{2}{3}(\vec{oc} + \vec{ob})$

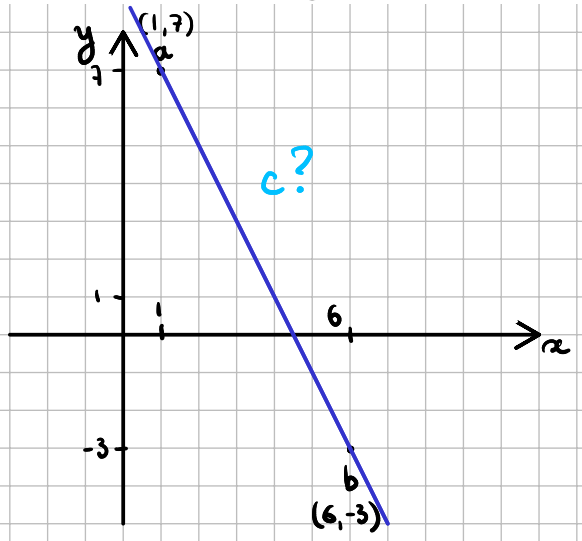
$\Leftrightarrow -\vec{oa} + \vec{oc} = \frac{2}{3}(\vec{oc} + \vec{ob})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\vec{oc} = \frac{2}{3}\vec{ob} + \vec{oa}$

$\Leftrightarrow \vec{oc} = \frac{3}{1}\left(\frac{2}{3}(6, -3) + (1, 7)\right)$

$\Leftrightarrow \vec{oc} = \frac{3}{1}\left(\underbrace{(4, -2) + (1, 7)}_{(5,5)}\right)$

$\Leftrightarrow \vec{oc} = (3, 3)$




Les coordonnées du point c sont $(3, 3)$ $(=$ les composantes de $\vec{oc})$

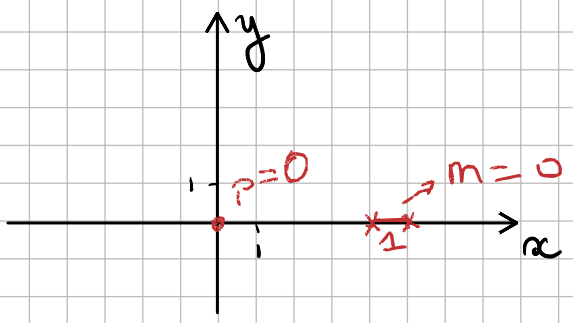
**6.5.** Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

a. l'axe $Ox$ ;

L'axe Ox a pour équation

$Ox \equiv y = 0x + 0$

$\equiv y = 0$



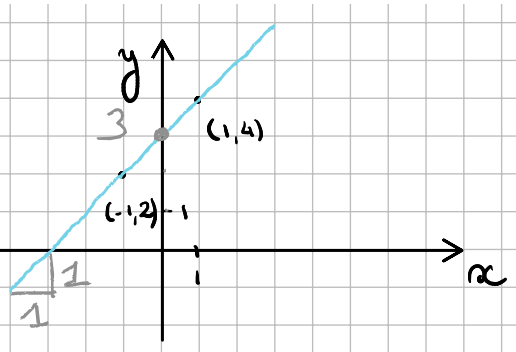

e. la droite $d_1$ qui passe par les points $(1,4)$ et $(-1,2)$ ;

pente $\frac{4-2}{1-(-1)} = 1$

point de la droite : $(1,4)$

équation : $d \equiv y - 4 = 1.(x-1)$

$\equiv y = x + 3$




La droite $d_1$ a pour équation $d_1 \equiv y = x+3$

g. la droite $d_2$ parallèle à la droite d'équation $x + 3y = -4$ qui passe par le point $(1,2)$.

pente : la même que celle de $x+3y=-4$

or $x+3y=-4 \iff 3y = -x-4$

$\iff y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

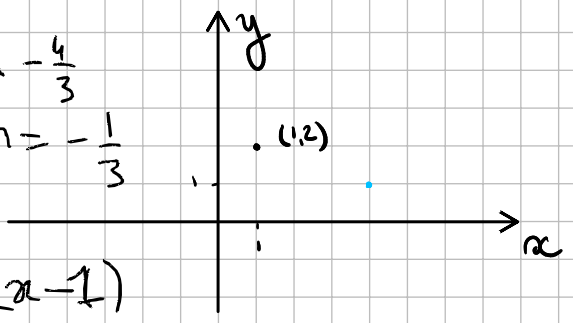
$\rightarrow m = -\frac{1}{3}$

point : $(1,2)$

équation :

$d \equiv y - 2 = -\frac{1}{3}(x-1)$

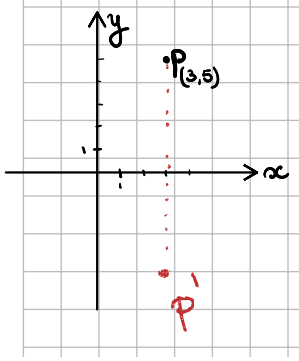
$d \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$




La droite $d_2$ a pour équation $d \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

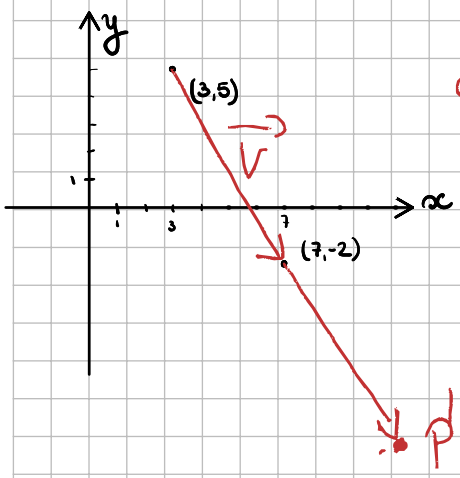
**6.9.** Soit le point $p = (3, 5)$ du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de $p$ par rapport

b. à l'axe $ox$ ;




Le point symétrique à p par rapport à l'axe Ox a pour coordonnées $(3, -5)$

d. au point $(7, -2)$ ;




$\vec{v} = (7-3 ; -2-5) = (4, -7)$

$\vec{op'} = \vec{op} + 2\vec{v} = (7, -2) + \vec{v} = (11, -9)$

Le point symétrique à p par rapport au point $(7,-2)$ est $(11, -9)$

**6.15.** Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$ $\Leftrightarrow$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$x^2 - 4x + ? = (x-a)^2$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

$y^2 + 6y + ? = (y-b)^2$

$y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y-(-3))^2$

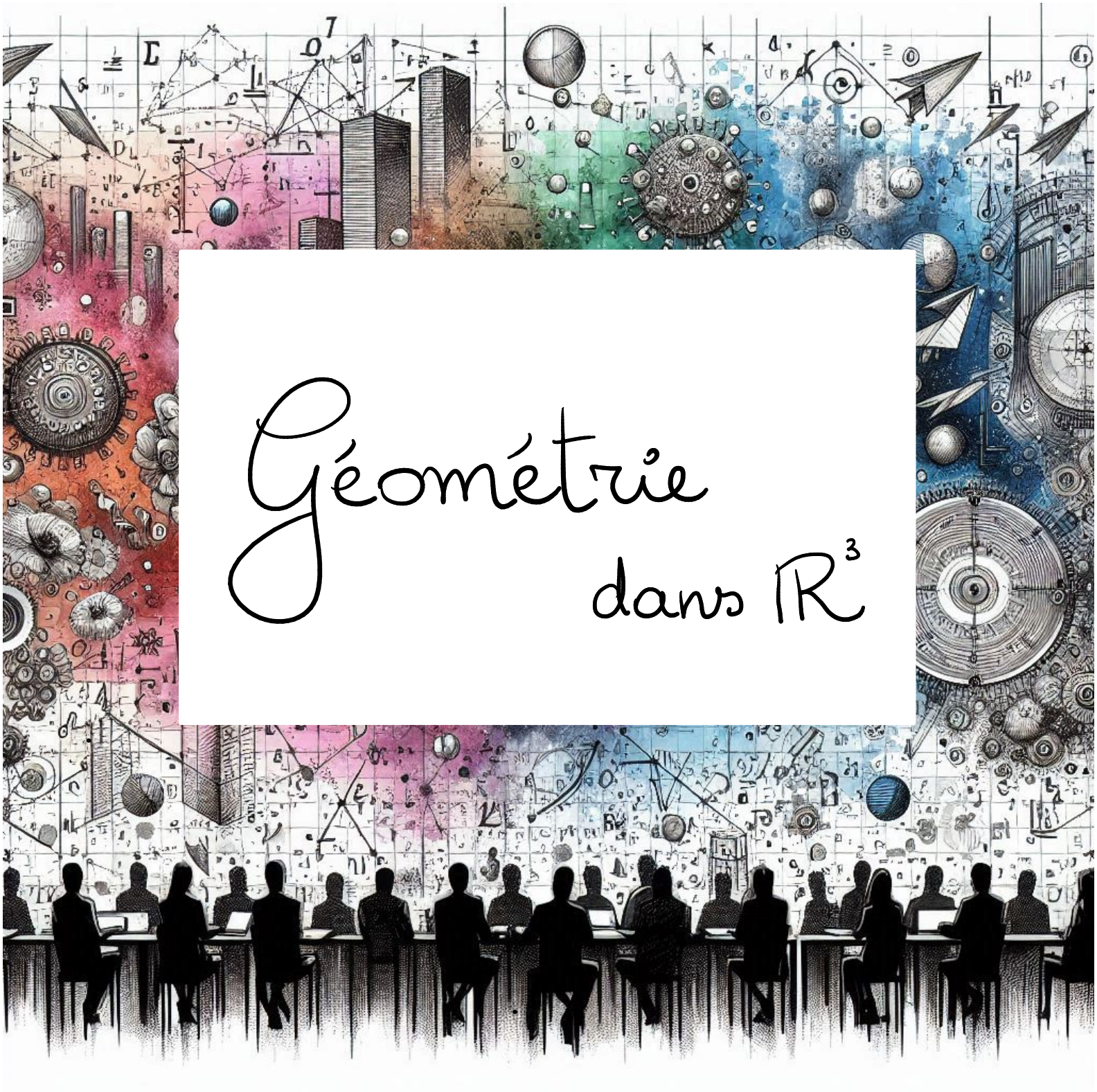
$\Leftrightarrow y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16 (= 4^2)$

Le centre du cercle est $(2, -3)$ et son rayon est $4$


Géométrie
dans $\mathbb{R}^3$

Vecteur $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{Op}$ où $p=(x,y,z)$

Norme $\|\overrightarrow{(x,y,z)}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Produit scalaire $\langle (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \rangle$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$)

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

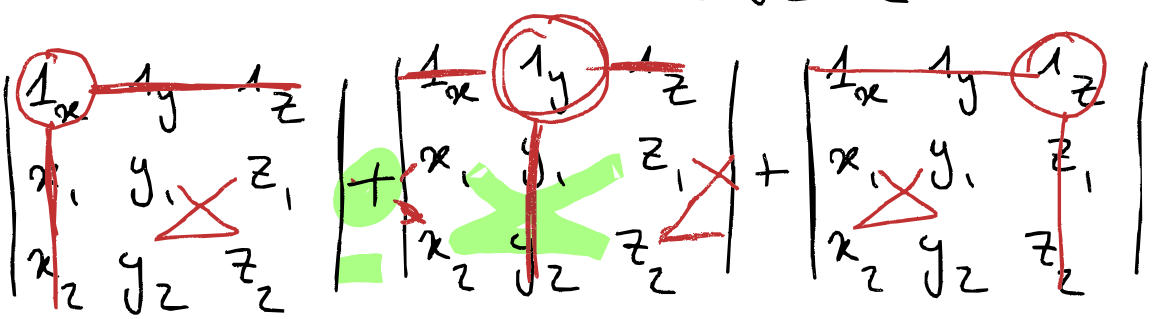


$= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ssi $\vec{a} \perp \vec{b}$

Vectoriel $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ssi $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{a} = k \cdot \vec{b}$)

$$(x_1,y_1,z_1) \times (x_2,y_2,z_2) = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$



$$= (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

# Plan $\pi$

$y - b = m \cdot (x - a)$

$$\pi = \{(x,y,z) : n_x(x-a) + n_y(y-b) + n_z(z-c) = 0\}$$

$(a,b,c) \in \pi$ $\quad$ $(n_x, n_y, n_z) = \vec{n}_\pi$

vecteur normal au plan

$$\pi = \left\{(x,y,z) : \begin{cases} x = a + u_x \lambda + v_x \mu \\ y = b + u_y \lambda + v_y \mu \\ z = c + u_z \lambda + v_z \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

où $(a,b,c) \in \pi$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}_\pi$

**Droites** : $d = \left\{(x,y,z) : \begin{cases} x = \alpha + v_1 \lambda \\ y = \beta + v_2 \lambda \\ z = \gamma + v_3 \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in d$

$(v_1, v_2, v_3) = \vec{v}_d$

$$d \equiv \frac{x-\alpha}{v_x} = \frac{y-\beta}{v_y} = \frac{z-\gamma}{v_z}$$

$$\pi \left\{(x,y,z) = (a,b,c) + \vec{u}\cdot\lambda + \vec{v}\mu\right\}$$

$$d = \left\{(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma) + \lambda \cdot \vec{v}_d\right\}$$

**6.19.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ de composantes respectives $(1,2,3)$, $(0,3,-4)$ et $(2,2,-2)$. On demande

a. la longueur de $\vec{v_2}$ ;

b. l'angle entre $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ ;

c. le produit vectoriel $\vec{v_2} \times \vec{v_3}$.

a. $\|\vec{v_2}\| = \sqrt{0^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

La longueur de $\vec{v_2}$ est $5$

b. $\alpha :=$ angle entre $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$

$x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = \langle \vec{v_1}, \vec{v_3} \rangle = \|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_3}\| \cdot \cos\alpha$

$\|\vec{v_1}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\|\vec{v_3}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = \sqrt{14} \cdot 2\sqrt{3} \cos\alpha$

$0 = \sqrt{14}\, 2\sqrt{3} \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

L'angle entre $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ est

c. $\vec{v_2} \times \vec{v_3} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$v_2 = (0,3,-4) \quad v_3 = (2,2,-2)$

$= \left( (-6-2(-4)) ; (-8-0) , (0-6) \right)$

$= (2, -8, -6)$

Le produit vectoriel de $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ est le vecteur $(2,-8,-6)$

**6.25.** Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est l'équation cartésienne du plan → vecteur normal

e. passant par les points $(2,0,0)$ $(0,6,0)$ et $(0,0,5)$ ;

vecteurs directeurs $\vec{v_1} = (0-2, 6-0, 0-0) = (-2, 6, 0)$

$\vec{v_2} = (-2, 0, 5)$

vecteur normal $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (30, 10, 12)$

équation $\pi \equiv 30(x-2) + 10(y-0) + 12(z-0) = 0$

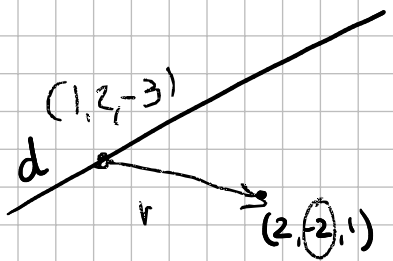
$\equiv 30x + 10y + 12z - 60 = 0$

L'équation du plan est

**6.29.** Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $a = (2, -2, 1)$ et qui contient la droite $D$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x &= 2t &+1 \\ y &= -5t &+2 \\ z &= 2t &-3 \end{cases}$$

Vecteurs directeurs : $\vec{v_1} = \vec{v_d} = (2, -5, 2)$




(vérifions que a ∈ d : $\begin{cases} 2 = 2t+1 \\ -2 = -5t+2 \\ 1 = 2t-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 4/5 \\ t = 2 \end{cases}$ impossible )

$\vec{v_2} = (2-1, -2-2, 1-(-3)) = (1, -4, 4)$

normal : $\vec{n} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = (-12, -6, -3)$

$\sim (4, 2, 1)$

$\pi \equiv -12(x-2) - 6(y+2) - 3(z-1) = 0$

L'équation du plan est $4x + 2y + z = 5$