
Limites

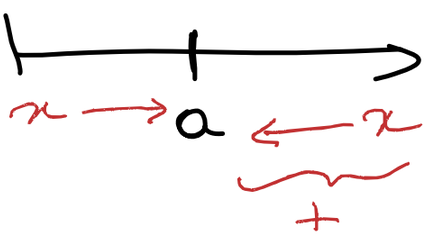
Limites à l'infini

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ y \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases}$$

Limites en un point

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ y \in \mathbb{R} \\ -\infty \end{cases}$$

$x \to a^{\pm}$: $<$ ou $>$



1) Remplacer limite

2) Simplifier (factorisation, développer)

3) Cas typiques

- trigo : faire apparaître $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} (= 1)$
- racines $\sqrt{\dots} \pm \sqrt{\dots}$ → binômes conjugués

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

- $x \to \pm\infty$: Mettre en évidence le terme dominant

8.4. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 1}(3x^2+1)$

c. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

e. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

a. $\lim_{x\to 1}(3x^2+1) = 3\cdot(1)^2+1 = 4$

c. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1$

$= 1+1 = 2$

$\left[\dfrac{1^2-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}\right]$

e. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)(1+h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h\cdot(h+2)}{h}$

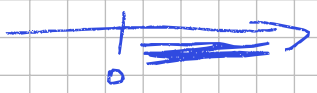
$= \lim_{h\to 0} h+2 = 2$

$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$

8.5. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de

a. $2x+\frac{|x|}{x}$;

limite à droite : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x+\dfrac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x+\dfrac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x+1 = 1$



limite à gauche : $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 2x+\dfrac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 2x+\dfrac{-x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 2x-1$

$= -1$

8.8. Calculer les limites pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$ des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

a. $y = 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 + 15$

d. $y = \dfrac{x-4}{x^2-6x+8}$

j. $y = \sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5}$

a. $\lim_{x\to\pm\infty} 5x^6+3x^3-7x^2+15 = \lim_{x\to\pm\infty} x^6\left(5+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{15}{x^6}\right)$

$\infty - \infty$

$\infty(5+0-0+0)$

$(-\infty)^6 = (-1)^6 \cdot (\infty)^6$

$= +\infty$

d. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-4}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-4/x)}{x^2(1-6/x+8/x^2)}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-4/x}{x(1-6/x+8/x^2)}$

$= 0$

$\frac{1}{\pm\infty}$

j. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{2x^2+3x-5}\right)$

$\left(\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5}\right)$

$\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5}$

A^2 B^2

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x^2-3x-5) - (2x^2+3x-5)}{\sqrt{2x^2-3x-5} + \sqrt{2x^2+3x-5}}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2}\sqrt{(2-3/x-5/x^2)} + \sqrt{x^2}\sqrt{(2+3/x-5/x^2)}}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x}{|x|\left(\sqrt{2-3/x-5/x^2} + \sqrt{2+3/x-5/x^2}\right)}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-6x}{x(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-6}{2\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{4} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{-x(2\sqrt{2})}$

8.9. Sachant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, que valent les limites pour $x \to 0$ des quantités

c. $\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

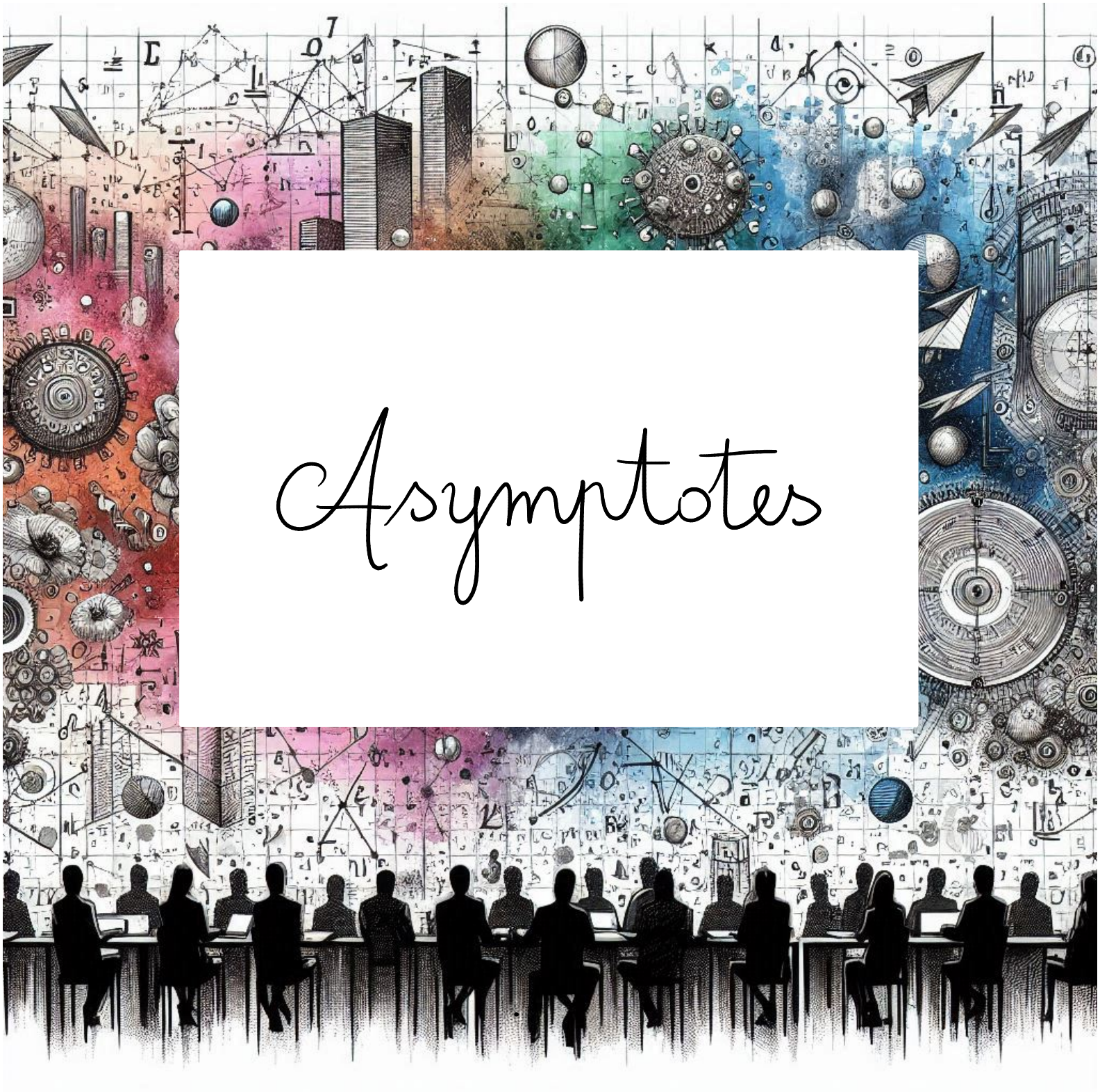
$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x \sin x}{1-\cos x}}_{\to 0} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x (1+\cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{(1+\cos x)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \to \frac{1}{1} = 1$$

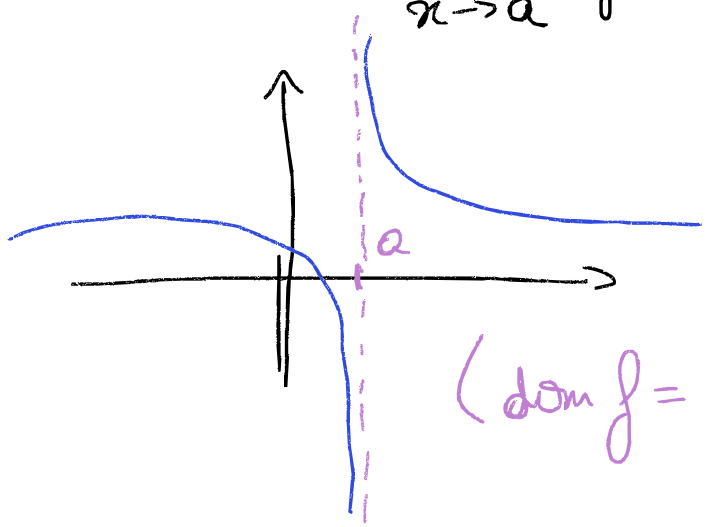
$\to 2$

$$= 2$$


Asymptotes

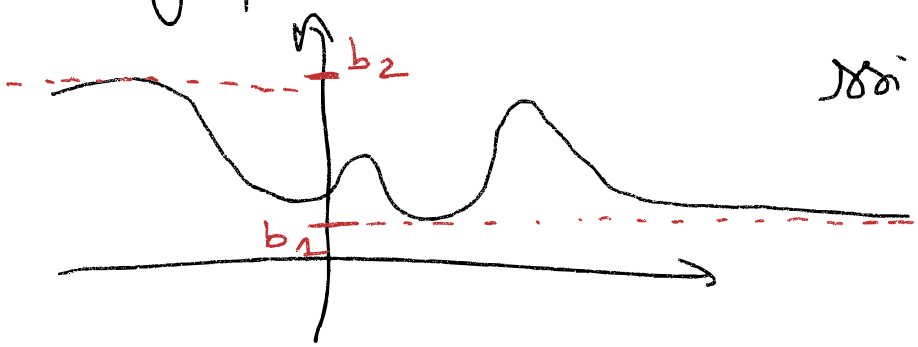
Asymptotes: verticales $\underline{A.V} \equiv x = a$

ssi $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$



$(\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{a\})$

Asymptotes horizontales $AH \equiv y = b$



ssi $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

Asymptotes obliques $A.O. \equiv y = mx + p$

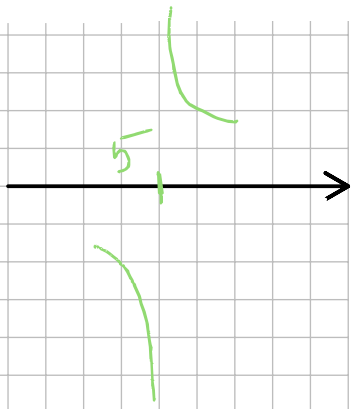
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m \cdot x = p$

8.10. Trouver les asymptotes aux graphes des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

b. $y = 2x + 7 + \dfrac{1}{x-5}$

* Asymptote(s) verticale(s)

$\lim_{\substack{x \to 5 \\ \S}} 2x + 7 + \frac{1}{x-5}$ $\begin{cases} x \to 5^+ : \frac{1}{0^+} = +\infty \\ x < 5 : -\infty \end{cases}$



$\rightarrow$ A.V. en $x = 5$

* Asymptote(s) horizontale(s)

$\lim_{x \to \pm\infty} 2x + 7 + \frac{1}{x-5} = \pm\infty$ pas d'A.H.

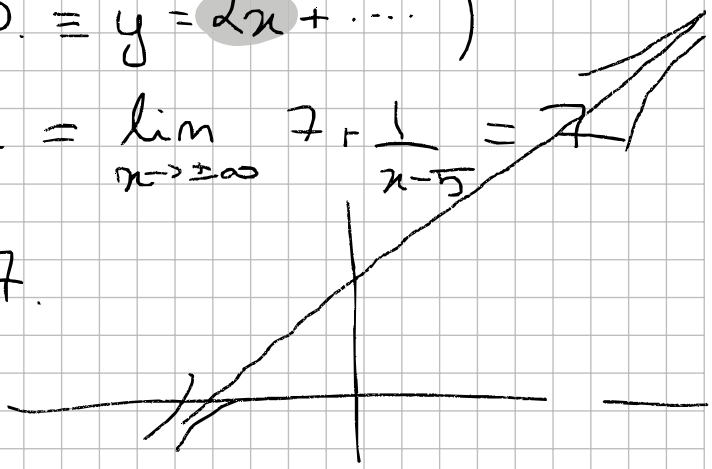
* Asymptote(s) oblique(s)

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+7+\frac{1}{x-5}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 2 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x(x-5)} = 2$

(A.O. $\equiv y = 2x + \cdots$)

$\lim_{x \to \pm\infty} 2x + 7 + \frac{1}{x-5} - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} 7 + \frac{1}{x-5} = 7$

$\rightarrow$ A.O $\equiv y = 2x + 7$.



La fonction possède

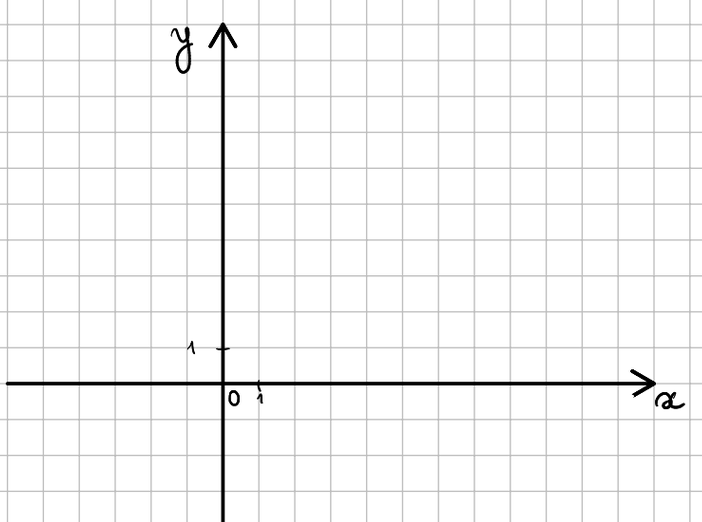
$$x \xrightarrow{y(\cdot)} y(x) \xrightarrow{y^{-1}(\cdot)} x \qquad \sqrt{x}$$

8.11. Pour chacune des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

déterminer le plus grand domaine et la fonction réciproque si elle existe. Représenter la fonction, sa fonction réciproque et la première bissectrice sur le même graphique.

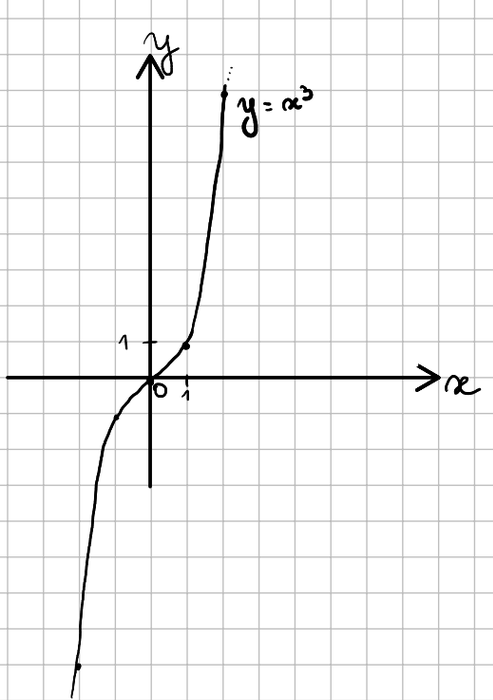
b. $y = \sqrt{x}$

CE :



b') $y = \frac{1}{2}(x-3)^3$

CE : $\nearrow \rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R}$; $\text{im} f = \mathbb{R}$

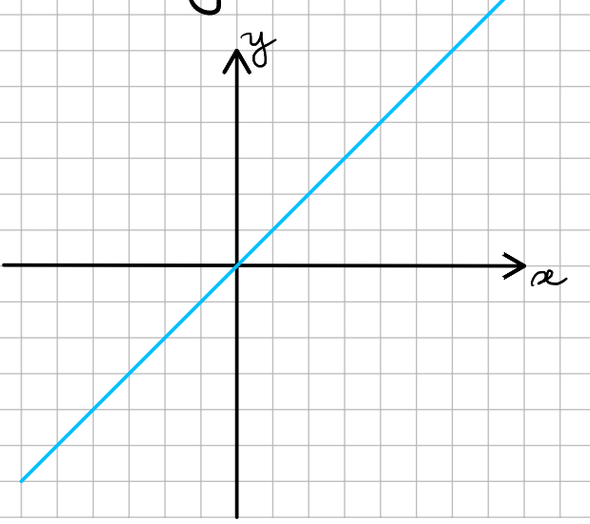


$y = \frac{1}{2}(x-3)^3$

$\rightarrow \quad 2y = (x-3)^3$

$\rightarrow \quad \sqrt[3]{2y} = x-3$

$\rightarrow \quad 3+\sqrt[3]{2y} = x$



$y(x) = 3+\sqrt[3]{2x}$

8.12. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pour } x < 0, \\ x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

a. Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.

b. Tracer le graphe de f.

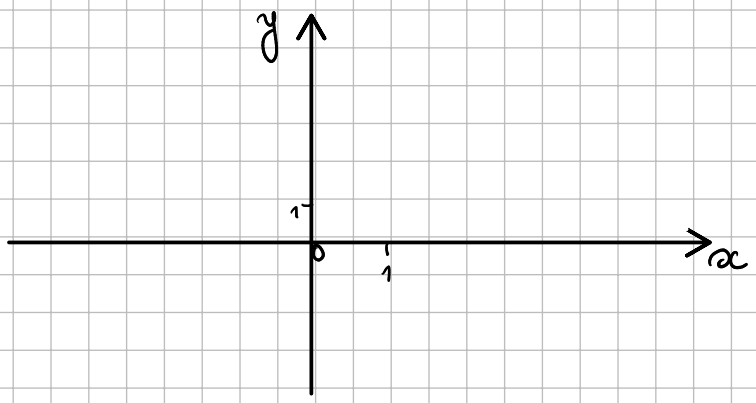
c. Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f.

d. Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.

e. En quels points f est-elle continue ?

a) $f(-2) =$; $f(0) =$; $f(\frac{3}{2}) =$; $f(3) =$

b)



c) CE:

Imf =

d) $x \to 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}$

$x \to 1$

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}$

$x \to 2$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}$

e) La fonction f est continue sur car

